

Renforcement physique

TD premier principe - solution

Exercice 1 : Travail au cours d'une transformation isotherme réversible

1. Le travail des forces de pression qui s'exercent sur un gaz est défini par $W = - \int_{E.I.}^{E.F.} P_{ext} dV$ où $E.I.$ et $E.F.$ représentent respectivement l'état initial et l'état final et P_e est la pression extérieure. Au cours d'une transformation réversible, $P = P_{ext}$ à chaque instant et nous avons donc $W = - \int_{E.I.}^{E.F.} P dV$ où P est la pression du gaz. Le travail des forces de pression lors de la transformation réversible isotherme d'une mole de gaz parfait à la température T_1 est donc donnée par :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = -RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = RT_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \quad (1)$$

L'équation 1 montre qu'un opérateur doit fournir du travail ($W > 0$) pour comprimer un gaz ($V_2 < V_1$).

2. Pour un gaz de Van der Waals $P = \frac{nRT}{V-b} - \frac{n^2a}{V^2}$. Le travail des forces de pression lors de la transformation réversible isotherme de n mole de gaz de Van der Waals à la température T_1 est donc donnée par :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{nRT_1}{V-b} - \frac{n^2a}{V^2} \right) dV = nRT_1 \ln \left(\frac{V_1-b}{V_2-b} \right) - n^2a \frac{V_1-V_2}{V_2V_1} \quad (2)$$

Pour un gaz très dilué, le covolume b est négligeable devant le volume V occupé par le gaz. L'équation 2 devient $W = nRT_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) - n^2a \frac{V_1-V_2}{V_2V_1}$. Le deuxième terme du membre de droite est une correction par rapport au gaz parfait qui provient de la prise en compte des interactions entre les particules. Notons que le terme correctif de pression diminue la pression du gaz par rapport à un gaz parfait.

Exercice 2 : Transformation monotherme, réversible ou irréversible.

1. Le gaz est considéré parfait, son équation d'état est donc $P_0V = nRT_0$. Le nombre de moles de gaz contenu dans le cylindre est relié à la masse de gaz par $n = \frac{m}{M} = \frac{4}{4} = 1 \text{ mol}$. La hauteur du cylindre est alors donnée par $h = \frac{nRT_0}{P_0S} = \frac{8,31 \times 300}{1,013 \cdot 10^5 \times 200 \cdot 10^{-4}} = 1,23 \text{ m}$.
2. (a) La paroi du cylindre est diathermane. L'équilibre thermique entre le gaz contenu dans le cylindre et le thermostat a le temps de s'établir lorsque une surcharge est appliquée progressivement. La température du gaz est donc définie à chaque instant et égale à T_0 . La transformation est isotherme.
- (b) Cependant, nous supposons que le piston se déplace lentement et sans frottement, la pression P du gaz est donc définie à chaque instant et égale à P_{ext} . Le gaz est donc à l'équilibre mécanique avec l'extérieur à chaque instant. L'absence de gradient de température assure l'absence d'irréversibilité thermique. Le gaz est à l'équilibre thermique avec l'extérieur. La transformation est donc réversible.

- (c) Nous devons déterminer la pression P_f du gaz contenu dans le cylindre dans l'état final pour pouvoir déterminer la hauteur h_1 du volume occupé par le gaz. Nous utilisons le fait que le piston est immobile dans l'état final. Le principe d'inertie stipule alors que la somme des forces qui s'exercent sur le piston est nulle. Cet équilibre des forces s'écrit $P_f S = P_0 S + mg$ avec $m = 100 \text{ kg}$. La pression P_f vaut donc $P_f = P_0 + \frac{mg}{S} = 1,013 \cdot 10^5 + \frac{100 \times 9,81}{200 \cdot 10^{-4}} = 1,503 \times 10^5 \text{ Pa}$. La hauteur h_1 du cylindre est donnée par $h_1 = \frac{RT}{P_f S} = 83 \text{ cm}$.
- (d) Le travail reçu par le gaz est égal, par définition au travail fourni par le milieu extérieur, soit $W = - \int_{E.I.}^{E.F.} F_{ext} dx$ où $E.I$ et $E.F.$ représente respectivement l'état initial et l'état final et F_{ext} la force extérieure qui s'exerce sur le gaz. Ici, la charge est appliquée progressivement sur le piston, la force extérieure varie donc continûment de $E.I$ à $E.F.$ et son expression n'est à priori pas connue. Cependant, nous supposons que le piston se déplace lentement et sans frottement, la pression P du gaz est donc définie à chaque instant et égale à P_{ext} . Le gaz est donc à l'équilibre mécanique avec l'extérieur à chaque instant. L'absence de gradient de température assure l'absence d'irréversibilité thermique. Le gaz est à l'équilibre thermique avec l'extérieur. La transformation est donc réversible et la force extérieure est, à chaque instant, équilibrée par la pression du gaz donné par $PV = nRT$. Le travail reçu par le gaz a donc pour expression $W = - \int_{h_0}^{h_1} P dV = -nRT_0 \int_{h_0}^{h_1} \frac{dV}{V} = nRT_0 \ln \left(\frac{h_0}{h_1} \right) = \frac{m}{M} RT_0 \ln \left(\frac{h_0}{h_1} \right) = 990 \text{ J}$.
3. (a) L'équilibre thermique n'a pas le temps de se faire lorsque le piston est comprimé rapidement.
- (b) Les échanges de chaleur avec le thermostat ne sont pas suffisants pendant la compression du cylindre pour pouvoir considérer que le processus est isotherme. Les gradients de température dans le gaz assurent l'irréversibilité du processus.
- (c) Les parois sont diathermanes, nous avons donc $T_f = T_0$ et P_f est donnée par l'équilibre des forces $P_f S = P_0 S + mg$. Autrement dit, l'état d'équilibre final est le même que la transformation soit rapide ou lente. Nous avons donc $h'_1 = h_1$.
- (d) Le travail reçu par le gaz est égal, par définition au travail fourni par le milieu extérieur, soit $W = - \int_{E.I.}^{E.F.} F_{ext} dx$ où $E.I$ et $E.F.$ représente respectivement l'état initial et l'état final et F_{ext} la force extérieure qui s'exerce sur le gaz. La transformation est telle que l'équilibre mécanique n'est pas assurée à chaque instant, il n'est donc pas possible d'exprimer F_{ext} en fonction de la pression du gaz. Par contre, étant donné la rapidité de la transformation, nous pouvons considérer que la F_{ext} qui s'exerce sur le piston est constante pendant la transformation. Le travail reçu par le gaz a donc pour expression $W = - \int_{h_0}^{h_1} (SP_0 + mg) dx = P_0 (V_0 - V_1) + mg(h_0 - h_1) = 1211 \text{ J}$.

Exercice 3 : Préparation du thé

1. La capacité thermique massique de l'eau à pression constante vaut $C_p = 1 \text{ Calorie g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ soit $C_p = 4185 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. On suppose que toute l'énergie dissipée par effet joule se dissipe dans l'eau et la réchauffe. Autrement dit, $P\Delta t = C_p m_{eau} \Delta T$ soit $P\Delta t = C_p \rho_{eau} V \Delta T$ d'où :
- $$\Delta t = \frac{C_p \rho_{eau} V \Delta T}{P} = \frac{4185 \times 3 \times 0,15 \times 70}{1200} = 110 \text{ s}.$$

Exercice 4 : L'indice adiabatique

1. Voir cours.

2. Voir cours.
3. Utiliser le théorème d'équipartition de l'énergie.

Exercice 5 : Variation d'énergie interne d'un gaz parfait

1. L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de T . C'est la première loi de Joule.
2. Nous cherchons un chemin où la variation de l'énergie interne avec la température est connue. Nous décomposons la transformation de A à B en une transformation isotherme suivi d'une transformation isochore de $A(P_A, V_A, T_A)$ à $C\left(\frac{P_A T_B}{T_A}, V_A, T_B\right)$ puis de $C\left(\frac{P_A T_B}{T_A}, V_A, T_B\right)$ à $B(P_B, V_B, T_B)$. La température du gaz ne change pas lors de la transformation de C à B . La variation d'énergie interne du gaz peut alors s'exprimer à l'aide de la capacité thermique à volume constant $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ puisque le volume du gaz est constant entre A et C . Nous obtenons donc $\int_A^C dU = \int_A^C C_V dT$. La variation d'énergie interne d'un gaz parfait dont la température passe de T_A à T_B est donc donnée par $U(T_B) - U(T_A) = C_V(T_B - T_A) = n c_V(T_B - T_A)$.
3. Pour un gaz parfait diatomique, $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4$ et la relation de Mayer s'écrit $C_P - C_V = nR$. La variation d'énergie interne des 6 g d'hélium vaut donc $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} \Delta T = \frac{mR}{M(\gamma-1)} \Delta T = 935 \text{ J}$.
4. Le travail W reçu par le gaz est, par définition, égal au travail fourni par l'extérieur, soit :

$$W = - \int_{E.I.}^{E.F.} P_{ext} dV$$

Où $E.I$ représente l'état initial, $E.F.$ l'état final et P_{ext} la pression extérieure. Un gaz parfait ne peut pas fournir de travail sans variation de volume. La transformation n'est donc pas isochore. Dans le cas d'une transformation isobare, la pression du gaz est constante et définie à chaque instant. Si nous faisons de plus l'hypothèse que la transformation est réversible, alors la pression du gaz est égale à la pression extérieure à chaque instant. Dans ce cas, le travail reçu par le gaz s'écrit $W = - \int_{E.I.}^{E.F.} P dV = - \int_{E.I.}^{E.F.} nRdT = -nR(T_{fin} - T_{initial}) = -374 \text{ J}$. Le travail fourni par le gaz au cours d'une transformation isobare réversible vaut donc 374 J.

Exercice 6 : Cycle de Lenoir

1. La figure 2 représente le cycle de Lenoir dans un diagramme de Clapeyron. Les transformations suivies ainsi que la relation des gaz parfaits permettent de connaître l'état du gaz en chaque point. L'état du gaz parfait en A est (P_0, V_0, T_0) . L'état du gaz parfait en B est $(P_0, 2V_0, 2T_0)$. L'état du gaz parfait en C est $(2P_0, V_0, 2T_0)$

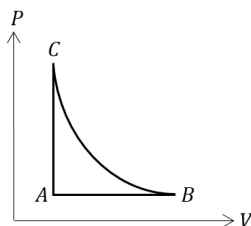


FIGURE 1 – Représentation du cycle de Lenoir dans un diagramme de Clapeyron.

2. • Le travail W reçu par le gaz est, par définition, égal au travail fourni par l'extérieur, soit :

$$W = - \int_{E.I.}^{E.F.} P_{ext} dV$$

Où $E.I$ représente l'état initial, $E.F.$ l'état final et P_{ext} la pression extérieure. La transformation est réversible, il y a donc en permanence équilibre mécanique entre le système et l'environnement lors des transformations. Nous avons donc $P = P_{ext}$ et le travail reçu par le système est donné par $W = - \int_{E.I.}^{E.F.} P dV$. En appliquant cette formule aux différentes transformations nous obtenons :

$$\begin{aligned} W(A \rightarrow B) &= - \int_{V_0}^{2V_0} P_0 dV = -P_0 V_0 \\ W(B \rightarrow C) &= - \int_{2V_0}^{V_0} P dV = -RT \int_{2V_0}^{V_0} \frac{dV}{V} = R2T_0 \ln 2 \\ W(C \rightarrow A) &= 0 \end{aligned}$$

- L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température. Par définition de la capacité thermique à volume constant, la variation infinitésimale de l'énergie interne d'une mole de gaz parfait s'écrit $dU = c_V dT$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} U(B) - U(A) &= c_V T_0 = \frac{R}{\gamma-1} T_0 \\ U(C) - U(B) &= 0 \\ U(A) - U(C) &= -c_V T_0 = -\frac{R}{\gamma-1} T_0 \end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire la chaleur reçue par le gaz pour les différentes transformations.

$$\begin{aligned} Q(A \rightarrow B) &= U(B) - U(A) - W(A \rightarrow B) = c_V T_0 + P_0 V_0 = (c_V + R) T_0 = c_P T_0 = \frac{R\gamma}{\gamma-1} T_0 \\ Q(B \rightarrow C) &= U(C) - U(B) - W(B \rightarrow C) = -W(B \rightarrow C) = -RT_0 \ln 2 \\ Q(C \rightarrow A) &= U(A) - U(C) - W(C \rightarrow A) = U(A) - U(C) = -c_V T_0 = -\frac{R}{\gamma-1} T_0 \end{aligned}$$

- Pour le cycle entier, le travail reçu par le gaz parfait vaut $W = -P_0 V_0 + R2T_0 \ln 2 = RT_0(2 \ln 2 - 1)$. Le travail total est positif, le cycle est donc récepteur.
- La deuxième loi de Joule stipule que l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépend que de la température. La variation d'enthalpie lors de la transformation isobare vaut donc, en utilisant la définition de la capacité thermique à pression constante, $H(B) - H(A) = c_P T_0$. Nous obtenons donc $H(B) - H(A) = Q(A \rightarrow B)$.

Exercice 7 : Transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait

1. L'équation d'état du gaz parfait donne $dT = \frac{1}{nR}(PdV + VdP)$. Pour un gaz parfait $dU = C_V dT$. Nous obtenons donc $dU = \frac{C_V}{nR}(PdV + VdP)$.
2. Pour une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, le premier principe s'écrit $dU = -PdV$ soit $\frac{C_V}{nR}(PdV + VdP) = -PdV$. Nous obtenons, en réarrangeant les termes $(C_V + nR)\frac{dV}{V} + C_V \frac{dP}{P} = 0$. Pour un gaz parfait, la relation de Mayer s'écrit $C_P - C_V = nR$. Nous arrivons ainsi à $\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$ soit $PV^\gamma = cst$.

Exercice 8 : Chauffage du lait

1. La transformation se fait à la pression atmosphérique P_0 . La transformation est donc monobare et nous avons en permanence équilibre mécanique entre l'atmosphère et le système constitué des deux masses de liquide. Le premier principe appliqué à ce système s'écrit donc $dU = \delta Q - P_0 dV = \delta Q - PdV$. Nous pouvons introduire la fonction enthalpie du système $H = U - PV$ pour obtenir $dH = \delta Q + VdP = \delta Q$ puisque la pression est

constante pendant la durée de la transformation. Le système constitué des deux liquides ne reçoit pas de chaleur pendant la transformation, nous avons donc $\Delta H = 0$. La fonction enthalpie est une grandeur extensive et nous considérons un couplage faible entre les deux liquides, nous avons donc $\Delta H = \Delta H_{eau} + \Delta H_{lait}$. Par définition de la capacité thermique à pression constante, nous pouvons exprimer ΔH en fonction de la variation de température et obtenir $\Delta H = mC_{eau}(T_f - T_{i,eau}) + mC_{lait}(T_f - T_{i,lait})$ où nous avons considéré que la capacité thermique est constante sur la plage de température mise en jeu lors de la transformation. L'eau est le constituant majoritaire du lait, nous considérons donc que $C_{lait} = C_{eau}$ et nous obtenons $T_f = \frac{T_{i,eau} + T_{i,lait}}{2} = 40^\circ\text{C}$.

Exercice 9 : Rendement théorique d'un moteur à essence

1. La figure 2 montre le cycle de Beau de Rochas.

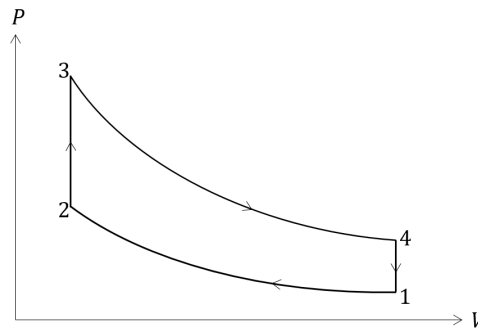


FIGURE 2 – Diagramme de Clapeyron du cycle de Beau de Rochas.

2.
 - Le fluide est mis en contact avec la source chaude et subit un échauffement isochore pendant la phase $2 \rightarrow 3$. Le premier principe s'écrit donc sur cette partie du cycle $dU = \delta Q$. Le fluide est supposé parfait, la première loi de Joule nous permet donc d'écrire $\delta Q = C_V dT$ soit $Q = C_V(T_3 - T_2)$.
 - Le fluide est mis en contact avec la source froide et subit un refroidissement isochore pendant la phase $4 \rightarrow 1$. Le premier principe s'écrit donc sur cette partie du cycle $dU = \delta Q'$. Le fluide est supposé parfait, la première loi de Joule nous permet donc d'écrire $\delta Q' = C_V dT$ soit $Q' = C_V(T_1 - T_4)$.
 - Le travail reçu par le fluide pendant les transformations isochores est nul. Il reste à évaluer le travail reçu par le fluide pendant les transformations adiabatiques réversibles. Le premier principe s'écrit pour une transformation adiabatique $dU = \delta W$. La première loi de Joule nous permet donc d'écrire $W_{1 \rightarrow 2} = C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = C_V(T_2 - T_1)$.
 - De même, le travail reçu par le fluide pendant la phase $3 \rightarrow 4$ a pour expression $W_{3 \rightarrow 4} = C_V \int_{T_3}^{T_4} dT = C_V(T_4 - T_3)$.
 - Le travail total reçu par le fluide a donc pour expression :

$$W = C_V(T_2 - T_1 + T_4 - T_3) \quad (3)$$

3. Le rendement a pour expression $\eta = \frac{-W}{Q_C}$ où Q_C est la chaleur fournie par la source chaude et $-W$ est le travail fourni par le fluide pendant un cycle. Le rendement s'écrit donc ici $\eta = \frac{C_V(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)}{C_V(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$.
4.
 - On définit le taux de compression $r = \frac{V_1}{V_2}$ soit $r = \frac{T_1 P_2}{T_2 P_1}$ en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits. Une transformation adiabatique réversible fait passer le fluide de

l'état 1 à 2. La loi de Laplace nous permet d'écrire $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$ ce qui nous donne $r = \frac{T_1}{T_2}r^\gamma$ d'où :

$$\frac{T_1}{T_2} = r^{1-\gamma} \quad (4)$$

- La figure 2 montre que $V_2 = V_3$ et que $V_4 = V_1$. Le taux de compression r a donc également pour expression $r = V_4/V_3$ soit $r = \frac{T_4P_3}{T_3P_4}$ en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits. Une transformation adiabatique réversible fait passer le fluide de l'état 3 à 4. La loi de Laplace nous permet d'écrire $P_3V_3^\gamma = P_4V_4^\gamma$ ce qui nous donne $r = \frac{T_4}{T_3}r^\gamma$ d'où :

$$\frac{T_4}{T_3} = r^{1-\gamma} \quad (5)$$

- Nous obtenons donc, en combinant les équations 4 et 5, $\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2} = r^{1-\gamma}$. Le rendement de la machine thermique a donc pour expression :

$$\eta = 1 - r^{1-\gamma} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \quad (6)$$

Puisque $\gamma > 1$, le rendement augmente avec le rapport de compression.

5. Pour $\gamma = 7/5$ et $r = 10$, nous trouvons $\eta = 0,6$.
6. L'équation 3 se réécrit, en utilisant les équations 4 et 5, $W = C_V (T_1(r^{\gamma-1} - 1) + T_3(r^{1-\gamma} - 1))$. Le travail fourni par la machine a donc pour expression $-W = C_V (T_1(1 - r^{\gamma-1}) + T_3(1 - r^{1-\gamma}))$.
7. Nous cherchons la valeur r_m de r pour laquelle le travail fourni est maximum. Cette valeur est donnée par $\frac{\partial(-W)}{\partial r} = 0$ soit $T_1(\gamma - 1)r_m^{\gamma-2} + T_3(1 - \gamma)r_m^{-\gamma} = 0$. Nous obtenons donc, après simplifications, $r_m = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}$.
8. L'expression du rendement (voir équation 6) correspondant à cette valeur du rapport de compression devient $\eta_m = 1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}$.
9. $T_1 = 300$ K et $r_m = 10$. Nous trouvons $T_3 = T_1r_m^{2(\gamma-1)} = 1890$ K et $T_2 = T_1r_m^{\gamma-1} = 754$ K.

Exercice 10 : Détente de Joule-Gay Lussac (d'après CCP)

Soit une masse m d'un gaz réel satisfaisant à l'équation d'état :

$$P(V - b) = aT$$

avec $b = 5 \times 10^{-6} \text{ m}^3$. On donne deux états de cette masse $P_2 = 50$ bar pour $V_2 = 4,57 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ et $P_1 = 50$ bar pour V_1 .

1. Exprimer les coefficients thermoélastiques α et χ_T . Comparer avec le gaz parfait.
2. Un tel gaz est appelé gaz de Joule car il vérifie la première loi de Joule. Rappeler la première loi de Joule.
3. Ce gaz est situé dans un cylindre rigide adiabatique à deux compartiments inégaux, dont il occupe le compartiment (1), le vide régnant dans le compartiment (2). On perce un trou entre les deux compartiments. Le gaz passe des conditions initiales P_1, V_1, T_1 aux conditions finales P_2, V_2, T_2 où V_2 est le volume total.
 - (a) Calculer la variation d'énergie interne.
 - (b) En déduire T_2 littéralement puis V_1 numériquement.

Exercice 11 : Transformations couplées (d'après Mines)

Un piston sépare le volume d'un cylindre en deux compartiments A et B . Le cylindre et le piston sont parfaitement calorifugés. Chaque compartiment contient la même quantité n d'un gaz parfait de coefficient $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$. On donne $V = V_A + V_B = 5,00 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ et $V_B = 4V_A$ à l'état initial. De plus, $T_A = T_B = T_0 = 289 \text{ K}$ et $P_A = P_0 = 24 \times 10^5 \text{ Pa}$.

1. Calculer la quantité de moles contenue dans A et B .
2. On débloque le piston (travail supposé négligeable) et ce dernier se déplace sans frottement jusqu'à l'équilibre mécanique. Établir la relation entre les variations d'énergie interne ΔU_A et ΔU_B du gaz dans A et B .
3. A l'état final, l'écart de température $T'_B - T'_A$ est de 130 K . Montrer que $T'_B = 354 \text{ K}$ et $T'_A = 224 \text{ K}$.
4. Calculer le volume V'_A et la pression P'_A du gaz dans A .