

Chapitre 1

Trajectoire des particules chargées dans un champ magnétique

A la fin de ce chapitre, vous serez capable de :

- déterminer les composantes de la vitesse d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme
- déterminer la trajectoire d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme
- déterminer l'expression de la fréquence de giration d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique

Nous allons étudier dans cette section la trajectoire d'une particule de charge q et de masse m plongée dans un champ magnétique uniforme et constant.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule a pour expression :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (1.1)$$

1.1 Un champ magnétique constant ne peut pas modifier l'énergie cinétique d'une particule

Notons un résultat à retenir, la force magnétique ne travaille pas. En effet, le travail de cette force pendant dt a pour expression :

$$\delta W = \vec{f}_{mag} \cdot \vec{v} dt = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0 \quad (1.2)$$

Ainsi, si nous multiplions scalairement par \vec{v} le principe fondamental de la dynamique nous obtenons :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

soit :

$$\frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt} = 0$$

Ainsi, **la force magnétique peut modifier l'orientation du vecteur vitesse de la particule mais ne peut pas modifier son énergie cinétique.**

1.2 Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

On étudie le problème dans un référentiel Galiléen et on repère la position de la particule à l'aide d'un système de coordonnées cartésiennes. Nous choisissons l'axe Oz suivant la direction du champ magnétique. Nous

avons donc $\vec{B} = B_0 \hat{u}_z$.

Nous considérons que la particule pénètre à l'origine du repère à $t = 0$ avec une vitesse initiale $v_x(t = 0) = v_c$, $v_y(t = 0) = 0$ et $v_z(t = 0) = v_{//}$.

La projection de l'équation fondamentale de la dynamique sur chaque axe a pour expression :

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= \frac{qB_0}{m}v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{qB_0}{m}v_x \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0\end{aligned}$$

La dernière équation montre que la vitesse parallèle à la direction du champ magnétique reste constante et a pour expression $v_z = v_{//}$. Le mouvement de la particule suivant l'axe du champ magnétique est donc un **mouvement de translation uniforme**.

Nous allons montrer que les deux premières équations décrivent **un mouvement de rotation autour de l'axe du champ magnétique**.

Nous allons voir que ce calcul est particulièrement simple si nous posons $\underline{v}(t) = v_x(t) + iv_y(t)$. La combinaison des deux premières équations donne :

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = -i\frac{qB_0}{m}\underline{v}$$

Nous obtenons une équation différentielle du premier ordre dont la solution a pour expression, en posant $\omega_c = \frac{qB}{m}$:

$$\underline{v}(t) = Ce^{-i\omega_c t}$$

En utilisant la formule d'Euler, nous obtenons :

Rappel de mathématique

La formule d'Euler a pour expression $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

$$\begin{aligned}v_x &= C \cos(\omega_c t) \\ v_y &= -C \sin(\omega_c t)\end{aligned}$$

Les conditions initiales de la particule montrent que $C = v_c$ d'où :

$$\begin{aligned}v_x &= v_c \cos(\omega_c t) \\ v_y &= -v_c \sin(\omega_c t)\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur vitesse de la particule a pour composante dans un repère cartésien, les composantes d'un vecteur vitesse orbital de norme v_c .

Le mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et constant est donc composé d'un mouvement de rotation uniforme autour des lignes de champ magnétique et d'un mouvement de translation uniforme le long des lignes de champ. La trajectoire des particules est donc hélicoïdale. Le mouvement de rotation autour des lignes de champ est appelé **mouvement cyclotronique**. La vitesse le long de l'orbite est appelée **vitesse cyclotronique**.

Le sens de la rotation dépend du signe de la charge, $\frac{qB_0}{m}$ est positif pour un proton, les équations précédentes montrent qu'un proton s'enroule autour du vecteur champ magnétique dans le sens négatif ($v_y < 0$ et $v_x > 0$ au début de la trajectoire). Un électron s'enroule autour du champ magnétique dans le sens positif.

Cette rotation se fait à la fréquence angulaire :

$$|\omega_c| = \frac{|e|B_0}{m} = 2\pi \nu_c \quad (1.3)$$

Une intégration par rapport au temps permet d'obtenir le vecteur position de la particule considérée, qui, compte tenu des conditions initiales, a pour expression :

$$\vec{OM} = \vec{R} + V_{//}t\hat{u}_z + \rho_L \sin(\omega_c t)\hat{u}_x + \rho_L \cos(\omega_c t)\hat{u}_y \quad (1.4)$$

où $\vec{R} = -\rho_L \hat{u}_y$ est le centre guide de la particule et la quantité ρ_L est le rayon de Larmor de la particule donnée par :

$$\rho_L = \frac{v_c}{\omega_c} \tag{1.5}$$

Point notation

Attention, il y a une petite ambiguïté sur le vocabulaire, la valeur du rayon de Larmor est une quantité positive (c'est le rayon de giration) et est la valeur absolue de $\frac{v_c}{\omega_c}$. Néanmoins, on pose pour simplifier les notations $\rho_L = \frac{v_c}{\omega_c}$.

Vous pouvez maintenant faire les exercices : 1 et 3

La figure suivante montre la trajectoire en hélice d'une particule chargée positivement dans un champ magnétique uniforme.



FIGURE 1.1 – Trajectoire en hélice d'une particule chargée positivement dans un champ magnétique uniforme. La flèche bleue indique la direction du champ magnétique tandis que la flèche verte indique la direction de la vitesse à un temps donné.

La figure suivante montre l'évolution du rayon de giration en fonction du type de particule et de sa vitesse.

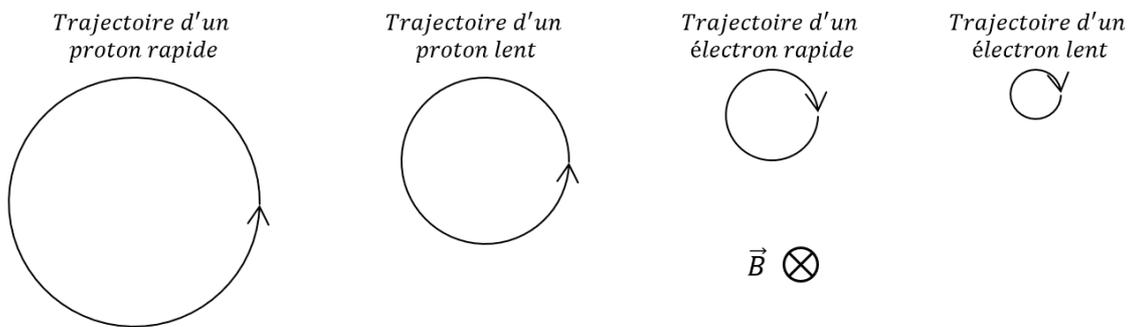


FIGURE 1.2 – Évolution du rayon de giration en fonction du type de particule et de sa vitesse. Le sens de rotation dépend du signe de la charge.

Il faut retenir que si nous étudions un processus où les échelles de temps sont plus longues que la période cyclotron, nous pouvons considérer¹ **que les particules chargées suivent les lignes de champ magnétique.**

Vous pouvez maintenant faire l'exercice : 4

1. Nous avons considéré ici un champ magnétique uniforme, dans le cas où les lignes de champ magnétique sont courbées, il est possible de montrer que les particules subissent un mouvement de dérive, c'est-à-dire que les particules changent de ligne de champ magnétique au cours du temps.

Application

Les aurores polaires sont dues à l'arrivée d'électrons de la magnétosphère de la Terre (figure 1.3) dans l'atmosphère terrestre (l'ionosphère plus précisément) où ils rentrent en collision avec les atomes d'azote et d'oxygène. La des-excitation de ces atomes provoque les couleurs observées lors des aurores polaires. Les électrons qui entrent dans l'ionosphère ont le mouvement en hélice décrit précédemment le long des lignes de champ magnétique terrestre.

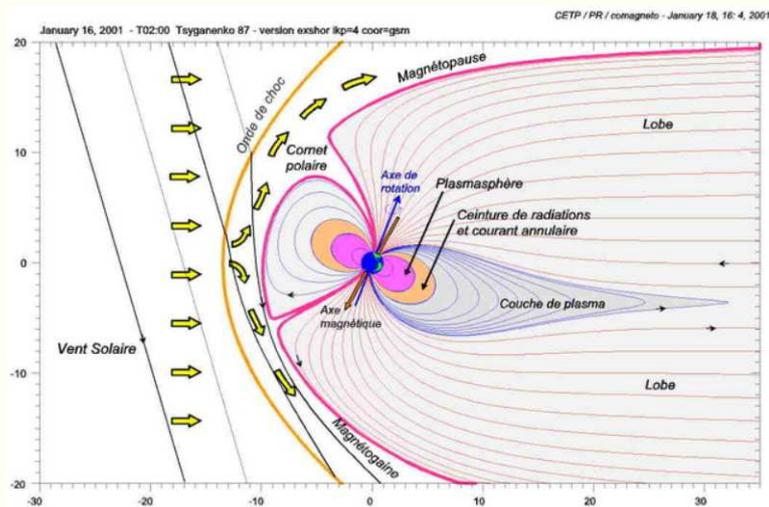


FIGURE 1.3 – Magnétosphère de la Terre et la magnétopause qui sépare la magnétosphère du vent solaire.

Ainsi, l'observation des aurores polaires indique la direction du champ magnétique terrestre local (figure 1.4). Ce phénomène se révèle particulièrement lorsque les aurores ont une structure striée.



FIGURE 1.4 – Direction du champ magnétique terrestre observable lors d'une aurore polaire.

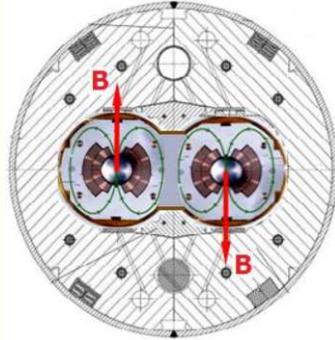
Vidéo à regarder sur internet

La vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=-ux3DMkbCrA> montre des aurores polaires filmées depuis le sol. Les électrons qui viennent de la magnétosphère et provoquent ces aurores suivent les lignes de champ magnétique. La direction du champ magnétique terrestre est donc visible lors de l'observation de ces aurores.

La vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=gzqo0V-FFQc> montre des aurores polaires filmées depuis l'ISS.

Application

Le champ magnétique est utilisé dans les accélérateurs de particules pour donner aux particules des trajectoires quasi-circulaire. Le LHC est un accélérateur de particules constitué de deux tubes vide d'air dans lesquels des protons se propagent en sens inverse. Les tubes se croisent à l'endroit des détecteurs qui analysent les collisions. La figure suivante montre le champ magnétique dans chaque tube qui permet de faire tourner les particules dans l'anneau.



1.3 Spectromètre de masse

La déviation d'une particule chargée par le champ magnétique peut-être utilisée pour réaliser un spectromètre de masse. Le but d'un tel appareil est de séparer les différentes molécules d'un matériau en fonction de leur masse afin de les identifier. Il existe plusieurs types de spectromètre de masse, la figure suivante montre le schéma de principe du spectromètre de Dempster (figure 1.5). La source à analyser est d'abord vaporisée puis ionisée. Les ions produits sont ensuite accélérés par un champ électrique qui résulte d'une différence de potentiel V . Le théorème de l'énergie mécanique appliqué à un ion montre que la vitesse d'entrée des ions dans le spectromètre est donnée par :

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

où q est la charge de l'ion.

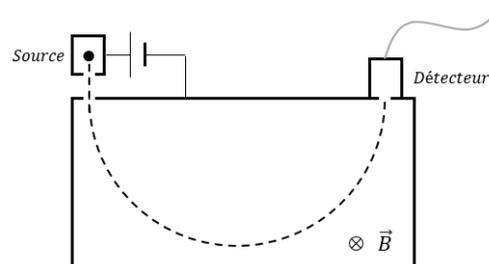


FIGURE 1.5 – Principe de base du spectromètre de Dempster.

Les ions pénètrent ensuite dans une chambre à vide plongée dans un champ magnétique transverse qui dévie les ions et leurs donne une trajectoire semi-circulaire de rayon $\rho_L = \frac{vm}{qB}$. En injectant l'expression de la vitesse des ions qui pénètrent dans la chambre, nous trouvons que le rayon de giration R des ions dans la chambre à vide est donné par :

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{2 \frac{m}{q} V}$$

Ainsi, la position du détecteur permet de sélectionner les ions reçu en fonction du rapport $\frac{m}{q}$ des ions. Le courant d'ions ainsi détecté permet de remonter au nombre d'ions dont le rapport $\frac{m}{q}$ est identique dans le matériau.

Vidéo à regarder sur internet

La vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=EzvQzImBuq8> montre le principe du spectromètre de masse.

Notons que les ions ne pénètrent pas tous dans la chambre à vide avec la même énergie cinétique, cette dispersion en énergie provoque une dispersion du rayon de giration. En effet, si nous considérons deux ions qui rentrent dans la chambre à vide avec une différence d'énergie cinétique δE_c , la variation relative $\frac{\delta R}{R}$ du rayon de giration des ions a pour expression $\frac{\delta R}{R} = \frac{1}{2} \frac{\delta E_c}{E_c}$.

De même, tous les ions ne pénètrent pas tous dans la chambre à vide avec le même angle, cette dispersion angulaire provoque une dispersion du rayon de giration (figure 1.6). En effet, si nous considérons deux ions qui rentrent dans la chambre à vide avec un angle $\delta\theta$ entre leurs deux trajectoires. La variation relative de la distance D entre les points d'entrée et de sortie des ions dans la chambre à vide a pour expression $\frac{\delta D}{D} = \frac{\delta\theta^2}{2}$.

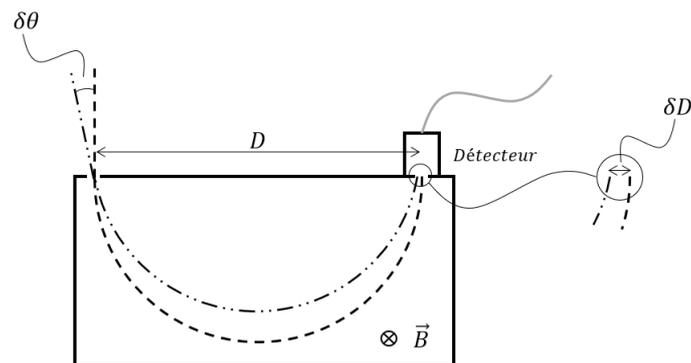


FIGURE 1.6 – Dispersion angulaire dans le spectromètre de Dempster.

La dispersion en énergie et la dispersion angulaire provoquent une baisse de la résolution du spectromètre.

🔗 **Vous pouvez maintenant faire l'exercice : 2**