Renforcement physique
Trajectoire des particules chargées dans un champ magnétique - solution

Exercice 1 : Mouvement d'une particule dans un champ magnétique constant et uniforme

1. Si nous multiplions scalairement par $\vec{v}$ le principe fondamental de la dynamique nous obtenons :
$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}.\vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v}$$
soit :
$$\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)(t)}{dt} = 0$$
2. La projection de l'équation fondamentale de la dynamique sur chaque axe a pour expression :
$$\begin{aligned}\frac{dv_x(t)}{dt} &= \frac{qB_0}{m}v_y \\ \frac{dv_y(t)}{dt} &= -\frac{qB_0}{m}v_x \\ \frac{dv_z(t)}{dt} &= 0\end{aligned}$$
La dernière équation montre que $v_z = cst$ soit $v_z = V$.
3. On obtient $\frac{d\underline{v}(t)}{dt} = -i\frac{qB_0}{m}\underline{v}$
4. La solution de l'équation différentielle d'ordre 1 homogène s'écrit :
$$\underline{v}(t) = Ce^{-i\omega_c t}$$
En utilisant la formule d'Euler, nous obtenons :
$$\begin{aligned}v_x &= C\cos(\omega_c t) \\ v_y &= -C\sin(\omega_c t)\end{aligned}$$
soit, compte-tenu des conditions initiales, $\vec{v} = v_0\cos(\omega_c t)\widehat{u}_x - v_0\sin(\omega_c t)\widehat{u}_y$.
5. On intègre pour obtenir $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Cst} + Vt\widehat{u}_z + \rho_L\sin(\omega_c t)\widehat{u}_x + \rho_L\cos(\omega_c t)\widehat{u}_y$ avec $\rho_L = \frac{v_0}{\omega_c}$. La particule est en $(0,0,0)$ à $t = 0$, la constante a donc pour expression $-\rho_L\widehat{u}_y$ d'où $\overrightarrow{OM} = Vt\widehat{u}_z + \rho_L\sin(\omega_c t)\widehat{u}_x - \rho_L(\cos(\omega_c t) - 1)\widehat{u}_y$.
6. On remplace par les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ obtenues à la question précédente pour obtenir $x^2 + (y + \frac{v_0}{\omega_c})^2 = (\frac{v_0}{\omega_c})^2$. C'est l'équation d'un cercle de centre $(x = 0, y = \frac{v_0}{\omega_c})$ et de rayon $\frac{v_0}{\omega_c}$. Puisque la particule se déplace à la vitesse V selon l'axe Oz, la particule a une trajectoire en forme d'hélice de centre guide $(x = 0, y = \frac{v_0}{\omega_c})$ et de rayon de giration $\rho_L = \frac{v_0}{\omega_c}$.
7. Schéma.

8. Le pas de l'hélice est la distance parcourue suivant l'axe Oz pendant une tour complet de la particule. La période de giration est $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$. La distance parcourue par la particule selon l'axe Oz pendant ce temps a pour expression $p = \frac{2\pi V}{\omega_c} = \frac{2\pi mV}{qB_0}$
9. La fréquence cyclotron a pour expression $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$.
10. A.N.

Exercice 2 : Trajectoire d'une particule chargée dans des champs électrique et magnétique orthogonaux

1. La projection de l'équation fondamentale de la dynamique sur chaque axe a pour expression :

$$\begin{aligned}\frac{dv_x(t)}{dt} &= a_E + \omega_c v_y \\ \frac{dv_y(t)}{dt} &= -\omega_c v_x \\ \frac{dv_z(t)}{dt} &= 0\end{aligned}$$

   En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer le système d'équations différentielles portant sur les composantes de la vitesse en fonction des paramètres $\omega_c = \frac{qB}{m}$ et $a_E = \frac{qE}{m}$.
2. $v_z = cst$.
3. On trouve $\frac{d\underline{v}(t)}{dt} = -i\omega_c \underline{v} + a_E$. C'est une équation différentielle d'ordre 1 inhomogène.
4. La solution de l'équation différentielle précédente est la somme de la solution homogène et de la solution particulière soit $\underline{v} = Ce^{-i\omega_c t} - i\frac{a_E}{\omega_c}$. La vitesse est nulle à $t = 0$ d'où $\underline{v} = i\frac{a_E}{\omega_c}(e^{-i\omega_c t} - 1)$. Nous obtenons donc $v_x(t) = \frac{a_E}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$ et $v_y(t) = \frac{a_E}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1)$
5. La vitesse de dérive est la vitesse qui ne dépend pas du temps soit $v_{derive} = -\frac{a_E}{\omega_c}\widehat{u}_y$.
6. L'équation du mouvement s'écrit $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Nous avons $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ d'où $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}'$. L'équation fondamentale de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}'$ a pour expression $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}' \wedge \vec{B}) = q(\vec{E} + \left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{B^2}\right) \wedge \vec{B} + \vec{v}' \wedge \vec{B}) = q\vec{v}' \wedge \vec{B}$. Cette équation décrit un mouvement de rotation de la particule dans un référentiel qui se déplace à la vitesse $\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{B^2} = -\frac{a_E}{\omega_c}\widehat{u}_y$

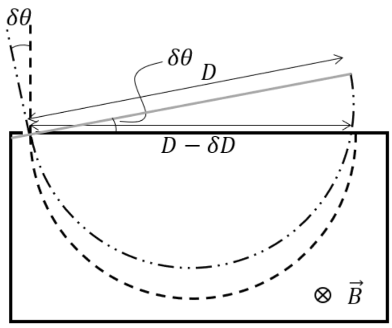
Exercice 3 : Spectromètre de masse

1. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit $\frac{1}{2}mv^2 = qV$ d'où $v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$.
2. Le rayon de giration a pour expression $R = \frac{v}{\omega_c} = \sqrt{\frac{2qV}{m}}\frac{m}{qB} = \sqrt{\frac{2mV}{q}}\frac{1}{B}$.

Les ions ne pénètrent pas tous dans la chambre à vide avec la même énergie cinétique, cette dispersion en énergie provoque une dispersion du rayon de giration et donc une baisse de la résolution du spectromètre.

3. On a $V = \frac{E_c}{q}$ d'où $R = \sqrt{\frac{2mE_c}{q^2}}\frac{1}{B} = \sqrt{2m}\frac{1}{qB}\sqrt{E_c}$. La variation δR du rayon de giration est donnée par $\delta R = R(E_c + \delta E_c) - R(E_c) = \sqrt{2m}\frac{1}{qB}\left(\sqrt{E_c + \delta E_c} - \sqrt{E_c}\right) = \sqrt{2m}\frac{1}{qB}\left(\sqrt{E_c}\left(1 + \frac{\delta E_c}{E_c}\right)^{1/2} - \sqrt{E_c}\right)$. Dans le cas $\delta E_c << E_c$, nous avons $\delta R = \sqrt{2m}\frac{1}{qB}\left(\sqrt{E_c}\left(1 + \frac{\delta E}{E}\right.\right.$ $\sqrt{2m}\frac{\sqrt{E_c}}{qB}\frac{\delta E_c}{2E_c}$ d'où $\frac{\delta R}{R} = \frac{1}{2}\frac{\delta E_c}{E_c}$.

4. La figure suivante montre le principe du raisonnement. Nous avons $\cos(\delta\theta) = \frac{D-\Delta D}{D} = 1 - \frac{\Delta D}{D}$. Pour un angle $\delta\theta << 1$, nous avons $1 - \frac{\delta\theta^2}{2} = 1 - \frac{\Delta D}{D}$ d'où $\frac{\delta D}{D} = \frac{\delta\theta^2}{2}$.



5. Le pic à 72 correspond à $CH_3CH_2CH_2CH_2CH_3^+$, le pic à 57 correspond à $CH_3CH_2CH_2CH_2^+$, le pic à 43 correspond à $CH_3CH_2CH_2^+$, le pic à 29 correspond à $CH_3CH_2^+$.