Renforcement physique
Trajectoire des particules chargées dans un champ magnétique

— Le niveau de difficulté en calcul est représenté par l'échelle

— Le niveau d'astuce à mettre en œuvre est représenté par l'échelle

— Le nombre de connaissances transversales en physique à mettre en œuvre est représenté par l'échelle

Exercice 1 : Mouvement d'une particule dans un champ magnétique constant et uniforme

On considère une particule de charge q et de masse m qui pénètre en $(0,0,0)$ dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \widehat{u}_z$ constant et uniforme. Les conditions initiales sont les suivantes : $v_x(t=0) = v_0$, $v_y(t=0) = 0$ et $v_z(t=0) = V$. Le poids de la particule est négligeable devant la force exercée par le champ magnétique.

1. Écrire la relation fondamentale de la dynamique puis multiplier scalairement par $\vec{v}$. En déduire que le champ magnétique ne peut pas accélérer une particule chargée.
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer le système d'équations différentielles portant sur les composantes de la vitesse en fonction du paramètre $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$. Comment évolue $v_z(t)$?
3. Poser ensuite $\underline{v}(t) = v_x(t) + iv_y(t)$ pour montrer que $\frac{d\underline{v}(t)}{dt} = -i\frac{qB_0}{m}\underline{v}$.
4. Résoudre l'équation différentielle précédente puis en déduire l'expression de $v_x(t)$ et $v_y(t)$.
5. En déduire que le vecteur position de la particule a pour expression $\overrightarrow{OM} = Vt\widehat{u}_z + \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)\widehat{u}_x - \frac{v_0}{\omega_c}(1-\cos(\omega_c t))\widehat{u}_y$.
6. Montrer que $x^2 + (y + \frac{v_0}{\omega_c})^2 = (\frac{v_0}{\omega_c})^2$. En déduire l'expression du rayon de giration de la particule autour du champ magnétique et la position du centre guide.
7. Faire un schéma de la trajectoire de la particule.
8. Quelle est l'expression de la fréquence angulaire de rotation de la particule autour du champ magnétique ? Quelle est l'expression de la période de rotation de la particule ?
9. Déterminer l'expression du pas de l'hélice.
10. Calculer la valeur de fréquence de giration de la particule pour $v_0 = 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $B_0 = 10^{-5}\,\mathrm{T}$, $|e| = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ et $m_e = 9{,}2 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

Exercice 2 : Trajectoire d'une particule chargée dans des champs électrique et magnétique orthogonaux

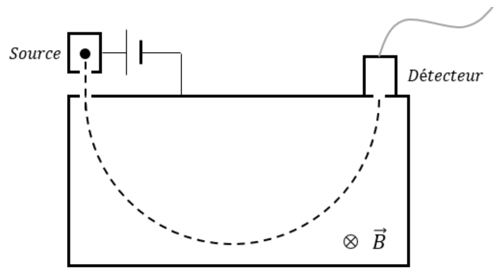
Soit une particule de masse m et de charge q dans le référentiel du laboratoire. A l'instant $t = 0$, elle est lâchée sans vitesse initiale dans une région de l'espace où règnent un champ électrique $\vec{E} = E\widehat{u}_x$ et un champ magnétique $\vec{B} = B\widehat{u}_z$ perpendiculaires et uniformes.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer le système d'équations différentielles portant sur les composantes de la vitesse en fonction des paramètres $\omega_c = \frac{qB}{m}$ et $a_E = \frac{qE}{m}$.
2. Comment évolue v_z ?
3. En utilisant la notation complexe $\underline{v} = v_x + iv_y$, calculer $\frac{d\underline{v}(t)}{dt}$ pour déterminer l'équation différentielle satisfaite par $\underline{v}$.
4. Résoudre l'équation différentielle précédente puis en déduire que $v_x(t) = \frac{a_E}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$ et $v_y(t) = \frac{a_E}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1)$
5. En déduire l'expression de la vitesse de dérive des particules.
6. Que devient l'équation du mouvement dans le référentiel qui se déplace à la vitesse $\vec{v}_e = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{B^2}$? En déduire l'expression de la vitesse de dérive des particules. On rappelle que $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$.

Exercice 3 : Spectromètre de masse

la figure suivante montre le schéma de principe du spectromètre de Dempster. La source à analyser est d'abord vaporisée puis ionisée. Les ions produits sont ensuite accélérés par un champ électrique qui résulte d'une différence de potentiel V.

Les ions pénètrent ensuite dans une chambre à vide plongée dans un champ magnétique B transverse qui dévie les ions et leurs donne une trajectoire semi-circulaire de rayon R.



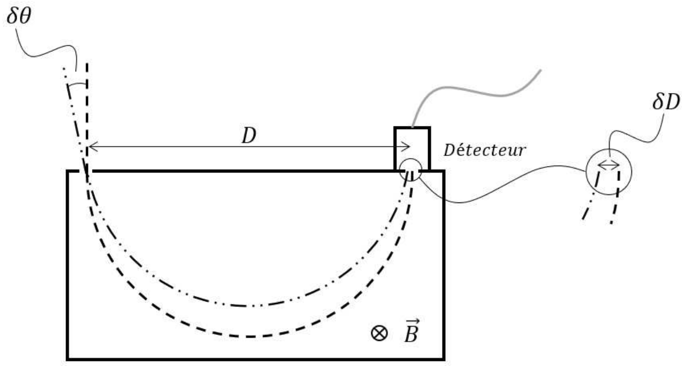
1. Déterminer l'expression de la vitesse d'un ion de charge q qui rentre dans le spectromètre en fonction de m, q et V.
2. Déterminer l'expression de R en fonction de B, m, q et V.

Les ions ne pénètrent pas tous dans la chambre à vide avec la même énergie cinétique, cette dispersion en énergie provoque une dispersion du rayon de giration et donc une baisse de la résolution du spectromètre.

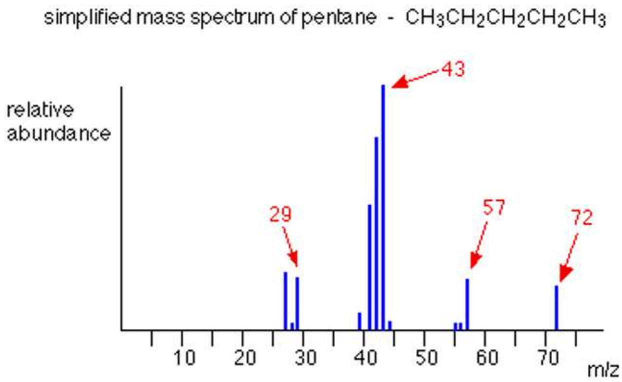
3. Nous considérons deux ions qui rentrent dans la chambre à vide avec une différence d'énergie cinétique δE_c tel que $\frac{\delta E_c}{E_c} << 1$. La variation δR du rayon de giration est donnée par $\delta R = R(E_c + \delta E_c) - R(E_c)$. Montrer que la variation relative $\frac{\delta R}{R}$ du rayon de giration des ions a pour expression $\frac{\delta R}{R} = \frac{1}{2}\frac{\delta E_c}{E_c}$.

Les ions ne pénètrent pas tous dans la chambre à vide avec le même angle, cette dispersion angulaire provoque une dispersion du rayon de giration et donc une baisse de la résolution du spectromètre.

4. Nous considérons deux ions qui rentre dans la chambre à vide avec un angle $\delta\theta$ entre leurs deux trajectoires. Montrer que la variation relative de la distance D entre les points d'entrée et de sortie des ions dans la chambre à vide est donnée à l'ordre deux par $\frac{\delta D}{D} = \frac{\delta\theta^2}{2}$.



La figure suivante montre le spectre de masse de la molécule de pentane de masse molaire $72\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$. Les différents pics correspondent à différents fragments de la molécule qui sont créés lors son ionisation. Chaque fragment qui peut-être créé est ionisé une seule fois.



5. Déterminer la composition des fragments qui donnent naissances aux principaux pics.