Système de deux corps célestes en interaction gravitationnelle

Consignes : Les programmes demandés sont a réaliser en Python.

Nous allons étudier dans ce projet un algorithme qui permet de résoudre les équations de Newton de la mécanique céleste. L'objectif est de produire un code qui permet de calculer la trajectoire de plusieurs corps célestes en interaction.

1 Méthode explicite

Nous sommes obligé de discrétiser le temps pour résoudre les équations de la physique numériquement.

Ainsi, nous pouvons réécrire le principe fondamental de la dynamique :

$$m\frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i}{\delta t} = \vec{F}_i$$

ce qui nous permet de déterminer $\vec{v}_{i+1}$ à partir de la vitesse v_i et de l'expression de la force au temps t_i.

Une telle méthode de résolution est appelée une méthode explicite. Les algorithmes explicites ont l'avantage de la simplicité de la mise en œuvre mais peuvent donner des résultats divergent si le pas de temps n'est pas assez faible.

Nous allons utiliser un schéma numérique explicite dans la suite.

2 Mouvement d'un corps céleste

Notre objectif est d'écrire un code permettant de calculer la trajectoire d'un ou plusieurs corps céleste en interaction gravitationnelle.

2.1 Changement d'unités

Pour éviter que l'ordinateur manipule des nombres trop grand ou trop petit, nous allons changer le système d'unités. Dans le code, les distances sont mesurées en unités astronomiques (A.U.), le temps en années et la masse en masse solaire. Dans ce système d'unités, nous pouvons montrer que G vaut 39,147.

2.2 Mouvement à deux corps

Nous allons dans un premier temps écrire un code qui permet de calculer la trajectoire de deux corps en interaction gravitationnelle.

Les équations à coder sont donc :

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= -\frac{Gm_2m_1}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \\
m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= -\frac{Gm_2m_1}{r_{12}^3}\vec{r}_{21}
\end{aligned}
$$

où r_{12} est la distance entre 1 et 2.

Il est possible de montrer mathématiquement à partir du théorème du moment cinétique que le mouvement à deux corps en contenu dans un plan et nous allons dans la suite travailler dans le plan Oxy. Nous nommons $O\vec{M}_1$ le vecteur position du corps 1 et $O\vec{M}_2$ le vecteur position du corps 2. Les équations à coder sont donc :

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= -\frac{Gm_2m_1}{r_{12}^3}(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}) \\
m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= -\frac{Gm_2m_1}{r_{12}^3}(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= v_{1x}\widehat{u}_x + v_{1y}\widehat{u}_y \\
\overrightarrow{OM}_1 &= x_1\widehat{u}_x + y_1\widehat{u}_y \quad \text{et} \\
r_{12} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}
\end{aligned}
$$

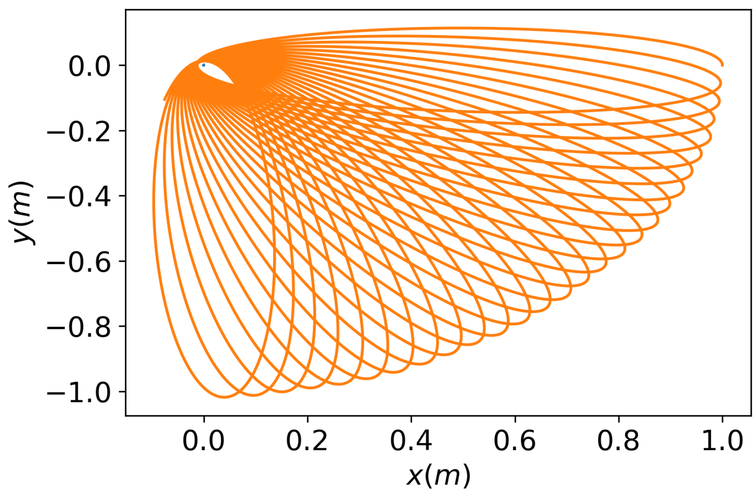
Il est possible de montrer qu'il faut d'abord calculer les vitesses au temps $i + 1$ avant de déterminer les nouvelles positions pour que les trajectoires soient stables. On parle d'algorithme saute-mouton.

Vous devez écrire le code qui permet d'étudier le système à deux corps en utilisant un algorithme saute-mouton.

Vous pourrez notamment étudier quelques cas particuliers pour vérifier que votre code produit des résultats corrects :

— deux corps deux masses identiques qui tournent autour de leur centre de masse.

— un corps très léger en orbite autour d'un corps beaucoup plus massif comme le montre la figure suivante.



— la collision entre deux corps célestes.