Schéma explicite - schéma implicite

Consignes : Les programmes demandés sont à réaliser en Python.

Nous allons formaliser dans ce projet quelques notions de bases sur les schémas numériques utilisés pour résoudre informatiquement les équations de la physique.

1 Schéma explicite ou implicite

1.1 Schéma explicite

Soit X une quantité physique que nous souhaitons calculer et qui est donnée par une équation différentielle. Dans un schéma explicite, nous avons $X_{i+1} = f(X_i)$. C'est-à-dire que nous calculons X au temps $i+1$ en fonction d'autres quantités évaluées au temps i.

Considérons l'équation différentielle :

$$\frac{dX}{dt} = -aX \tag{1}$$

1. Donner la solution de cette équation différentielle.

Pour résoudre numériquement cette équation, nous pouvons utiliser un schéma numérique explicite ou implicite. Dans le cas d'un schéma explicite nous calculons la valeur de X au temps $i+1$ par le schéma suivant

$$\frac{X_{i+1} - X_i}{\delta t} = \left(\frac{dX}{dt}\right)_i = -aX_i$$

soit :

$$X_{i+1} = X_i - a\delta t X_i$$

ce qui nous permet de déterminer X_{i+1} à partir de X_i.

Une telle méthode de résolution est appelée une méthode explicite. Les algorithmes explicites ont l'avantage de la simplicité de la mise en œuvre mais peuvent donner des résultats divergent si le pas de temps δt n'est pas assez faible. L'exemple précédent nous permet de le comprendre. Nous avons en effet $X_n = X_{n-1}(1 - a\delta t) = X_{n-2}(1 - a\delta t)^2 = X_0(1 - a\delta t)^n$

Cette suite géométrique converge si $|1 - a\delta t| < 1$. Numériquement, nous obtenons un comportement correct si la suite X_i est monotone et non pas oscillante. Nous devons donc avoir $0 < 1 - a\delta t < 1$ soit :

$$\delta t < \frac{1}{a}$$

2. Faire le code qui permet de résoudre numériquement l'équation 1 en utilisant un schéma explicite. Montrer que la solution diverge si $\delta t > \frac{1}{a}$.

1.2 Schéma implicite

Dans le cas d'un schéma implicite nous calculons la valeur de X au temps $i+1$ par le schéma suivant

$$\frac{X_{i+1} - X_i}{\delta t} = \left(\frac{dX}{dt}\right)_{i+1}$$

soit :

$$X_{i+1} = X_i - a\delta t X_{i+1}$$

d'où $X_{i+1} = \frac{1}{1+a\delta t} X_i$. Cette suite géométrique converge si $|\frac{1}{1+a\delta t}| < 1$. Numériquement, nous obtenons un comportement correct si la suite X_i est monotone et non pas oscillante. Nous devons donc avoir $1 + a\delta t > 1$. Ainsi, nous pouvons prendre δt aussi grand que nous le souhaitons avec ce schéma implicite.

3. Faire le code qui permet de résoudre numériquement l'équation 1 en utilisant un schéma implicite. Comparer la solution à la solution exacte pour différente valeur de δt.

1.3 Équations différentielles couplés

On considère le système d'équations différentielles :

$$\frac{dX}{dt} = 998X + 1998Y$$
$$\frac{dY}{dt} = -999X - 1999Y$$

4. Faire le code qui permet de résoudre numériquement l'équation 1 en utilisant un schéma explicite. Montrer que la solution diverge si $\delta t > 10^{-3}$.

5. Faire le code qui permet de résoudre numériquement l'équation 1 en utilisant un schéma implicite.