Physique statistique
TD 1 : Probabilité et dénombrement

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

— Le niveau de difficulté en calcul est représenté par l'échelle

— Le niveau d'astuce à mettre en œuvre est représenté par l'échelle

1 Les savoir-faire

Savoir utiliser une distribution de probabilité discrète

Exercice 1 : Lancer de dé

On considère un lancer de dé à 6 faces non pipé. La variable aléatoire x peut prendre les valeurs $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Calculer la valeur moyenne, la variance et l'écart-type de x.

Exercice 2 : Distribution de Poisson

Soit x une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs $0, 1, 2, ...$. La quantité x est distribuée suivant la loi de Poisson si la probabilité d'obtenir x est donnée par $p(x) = \frac{e^{-m}m^x}{x!}$. La distribution de Poisson est utile pour décrire les événements rares et indépendants.

1. Montrer que $\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$.

   Outil mathématique à utiliser : le développement en série entière de l'exponentielle.

2. Montrer que $< x >= \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) = m$.

Savoir utiliser une distribution de probabilité continue

Exercice 3 : Libre parcours moyen

Nous considérons une particule qui se propage dans un milieu. Nous cherchons à établir la densité de probabilité que la particule subisse une collision dans l'intervalle entre x et $x + dx$.

Ce calcul repose sur l'hypothèse suivante : la probabilité qu'une particule subisse une collision se produise dans l'intervalle dx a pour expression $\frac{dx}{\lambda}$ où λ est une longueur dont nous allons établir la signification physique.

1. Montrer que **la probabilité** $p(x)$ que la particule n'ait pas subi de collision après avoir parcouru la distance x vérifie la relation $p(x+dx) = p(x)\left(1 - \frac{dx}{\lambda}\right)$. Remarque :

$p(x)$ représente donc la probabilité que la particule parcourt au minimum la distance x.

2. En déduire que la probabilité $p(x)$ a pour expression $p(x) = e^{-x/\lambda}$ et vérifier que p a les propriétés d'une probabilité.
3. Nous pouvons établir la probabilité $p(x)$ à l'aide d'une autre démonstration. Nous décomposons la distance x en N intervalles dx en faisant tendre N vers l'infini. Montrer que $p(x) = \lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{N\lambda}\right)^N$. En déduire que $p(x) = e^{-x/\lambda}$.
4. Nous cherchons maintenant une information sur la probabilité que la particule ait une collision à la position x. Puisque x est une variable continue, cette probabilité est nulle et nous introduisons donc la **densité de probabilité** $P(x)$ et $P(x)dx$ représente la probabilité que la particule ait subit une collision entre x et $x + dx$. Montrer que $P(x)dx = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$ et vérifier que cette distribution est bien normalisée.
5. Déterminer l'expression de $< x >$: la distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions, c'est-à-dire le libre parcours moyen.

Exercice 4 : Distribution Gaussienne

Soit $x \in \mathbb{R}$ une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est $P(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ où C et a sont des constantes. Le graphe de cette fonction est une gaussienne.

1. Que représente $P(x)dx$?
2. Montrer que $C = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}$. Le plus simple pour obtenir ce résultat est de calculer I^2 et en passant en cordonnées polaires. On note $I = \int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx$
   Outil mathématique à utiliser : l'élément de surface $dxdy$ en cartésien est égale à $rdrd\theta$ en polaire.
3. Montrer que $< x >= 0$ et que $< x^2 >= a^2$.

Savoir dénombrer le nombre de configurations

Exercice 5 : Dénombrement

1. De combien de manières différentes peut-on disposer n objets discernables dans n boîtes différentes, sachant que l'on ne peut pas mettre plus d'un objet par boîte ?
2. Combien existe-t-il de manières de tirer p objets parmi n objets discernables dans le cas où l'ordre du tirage a de l'importance ?
3. Combien existe-t-il de manières de tirer p objets parmi n objets discernables dans le cas où l'ordre du tirage n'a pas d'importance ?
4. Combien y a-t-il de manières de placer n objets discernables dans g boîtes différentes ? Chaque boîte peut contenir jusqu'à n objets.

Exercice 6 : Boîte à atomes

On considère un système qui contient 10 atomes. Chaque atome peut exister dans un état d'énergie bas compté 0 et dans un état d'énergie haut compté ε.

1. Combien de configurations microscopiques peuvent conduire à une énergie totale de 10ε ?

2. Combien de configurations microscopiques peuvent conduire à une énergie totale de 4ε ?

2 La mise en œuvre

Exercice 7 : Variance de la distribution de Poisson

Soit x une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots$. La quantité x est distribuée suivant la loi de Poisson si la probabilité d'obtenir x est donnée par $p(x) = \frac{e^{-m}m^x}{x!}$. La distribution de Poisson est utile pour décrire les événements rares et indépendants.

1. Montrer que $< x^2 >= m + m^2$.
2. En déduire que la variance est égale à la valeur moyenne.

Exercice 8 : Distribution géométrique

Nous considérons le lancé d'une pièce pipée. Nous notons p la probabilité d'obtenir face et q la probabilité d'obtenir pile. Nous lançons la pièce jusqu'à obtenir face puis nous arrêtons de jouer. La variable discrète $x = \{1, 2, 3, \ldots\}$ que nous considérons ici est donc le nombre de fois qu'il faut lancer la pièce pour obtenir face.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir face au bout de $x = n$ lancer de la pièce.
2. Montrer que cette probabilité est bien normalisée.
3. Calculer la valeur moyenne de x.

Exercice 9 : Particule coincée entre deux murs

Considérons une particule à vitesse constante qui rebondit entre deux murs situés entre les points $x = 0$ et $x = 2l$.

1. Soit x la variable qui représente la position de la particule entre les deux murs. Quelle est la distribution de probabilité correspondante ?
2. Déterminer la valeur moyenne de la position de la particule.
3. Déterminer l'écart type de la position de la particule.

Exercice 10 : Densité de probabilité d'un oscilatteur harmonique classique

On considère une particule se déplaçant selon un axe Ox avec un mouvement harmonique d'équation $x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$. La probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$ est proportionnelle à temps passé par la particule dans cet intervalle.

1. Déterminer l'expression de la vitesse de la particule entre fonction de x, ω et x_0.
2. Déterminer l'expression de la distribution de probabilité $P(x)$.
3. Tracer le graphe de $P(x)$.

Exercice 11 : Distribution exponentielle

Soit $t \geqslant 0$ une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est $P(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}}$ où C et τ sont des constantes. Ce type de distribution représente par exemple la décroissance radioactive d'un noyau.

1. Que représente $P(t)dt$?
2. Déterminer l'expression de C.
3. Déterminer l'expression de $< t >$ et de $< t^2 >$. En déduire l'écart type de la distribution de probabilité.

Exercice 12 : Distribution uniforme

Soit θ une variable aléatoire continue qui est uniformément distribuée entre 0 et π.

1. Déterminer l'expression de $P(\theta)$.
2. Déterminer l'expression de $< \theta >$.
3. Déterminer l'expression de $< \theta - \frac{\pi}{2} >$.
4. Déterminer l'expression de $< \theta^2 >$.
5. Déterminer l'expression de $< \cos\theta >$.
6. Déterminer l'expression de $< \cos^2\theta >$.
7. Déterminer l'expression de $< \sin^2\theta >$.
8. Déterminer l'expression de $< \cos^2\theta + \sin^2\theta >$.

Exercice 13 : Dopage d'un semi-conducteur

Arès avoir dopé un semi-conducteur, la densité de probabilité de trouver une impureté à une distance $x \geqslant 0$ sous la surface est donnée par :

$$P(x) = \frac{0,8}{l} e^{-x/l} + 0,2\delta(x-d)$$

où $\delta(x)$ est la fonction de Dirac qui obéit à la propriété $\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$.

1. Déterminer l'expression de $< x >$.
2. Déterminer l'expression de σ_x.

Exercice 14 : Formule du binôme de Newton

Démontrer la formule du binôme de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Exercice 15 : Chemin

Soient p et q deux entiers dans $\mathbb{N}^\star$. On appelle chemin toute application :

$$\gamma : \{1, ..., p+q\} \to \{0, ..., p\} \times \{0, ..., q\}$$

telle que $\gamma(1) = (0,0)$ et pour tout entier k entre 1 et $p+q-1$, l'une seulement des deux coordonnées de $\gamma(k)$ augmente de 1 pour obtenir $\gamma(k+1)$ à partir de $\gamma(k)$.

1. Déterminer le nombre total de chemins possibles.
2. Soit $(i,j) \in \{0, ..., p\} \times \{0, ..., q\}$ un point fixe. Combien y a-t-il de chemins passant par le point (i,j) ?

Exercice 16 : Probabilité d'occupation

On considère un gaz parfait formé de $N = 4$ molécules identiques discernables évoluant dans un récipient formé de 2 compartiments identiques A et B communiquant par une ouverture.

1. Pour chaque valeur de $n(n = 0, 1, 2, 3, 4))$, quelle est la probabilité $p(n)$ de trouver n molécules dans le compartiment A ?
2. Calculer le nombre moyen de molécules dans A, ainsi que la variance et l'écart type.
3. On suppose que le compartiment A est 3 fois plus grand que l'autre dans la suite. Il n'y a qu'une molécule dans la boite. Quelle est la probabilité p de trouver cette molécule dans A ?
4. Il y a 4 molécules dans la boite. Calculer $p(n)$ et la valeur moyenne de n.

Exercice 17 : Boules dans une boîte

Nous considérons le jeu suivant. Nous plaçons deux boules blanches et trois boules noires dans une boîte.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

On tire successivement 4 boules de la boîte en remettant la boule dans la boîte après chaque tirage.

2. Quel est le nombre de résultats possibles ?