

CHAPITRE 5

Le volume d'une sphère à N dimensions

Objectifs :

- calculer le volume d'une sphère à N dimensions

Ce chapitre est purement mathématique. Nous allons y établir un résultat que nous allons utiliser par la suite dans le calcul du nombre de microétats dans l'espace des phases : le volume d'une sphère de dimensions N .

5.1 Volume d'une hypersphère

Soit x_1, x_2, x_3 les coordonnées de $\mathbb{R}^3$. Le théorème du pythagore permet de définir le cercle de rayon r qui a pour equation $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ et la sphère de rayon r qui a pour équation $x_1^2 + x_2^2 + x^2 = r^2$. Nous généralisons pour définir une hypersphère de rayon r dans $\mathbb{R}^N$ par l'équation :

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 = r^2$$

où x_i avec $i = 1, \dots, N$ sont les coordonnées de $\mathbb{R}^N$.

Par simple analyse dimensionnelle, nous savons que le volume V de l'hypersphère est de la forme :

$$V = \alpha r^N$$

où α est une constante que nous allons déterminer.

Nous allons utiliser l'astuce suivante pour déterminer cette constante. Nous avons déjà vu le calcul des intégrales Gaussiennes. Pour calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1$, nous calculons I^2 et faisons apparaître l'élément de surface d'un disque soit :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 e^{-x_1^2} e^{-x_2^2}$$

☞ $\alpha = \pi$ pour un disque et $\alpha = \frac{4}{3}\pi$ pour une boule dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 e^{-r^2} \\
 &= \int_0^{+\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2} \\
 &= \int \int dS e^{-r^2}
 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déterminer $I = \sqrt{\pi}$.

Nous allons donc généraliser et calculer :

$$\begin{aligned}
 I^N &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N e^{-x_1^2} \dots e^{-x_N^2} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N e^{-\sum_{i=1}^N x_i^2} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N e^{-r^2} \\
 &= \int \dots \int dV e^{-r^2}
 \end{aligned}$$

avec $I^N = \pi^{N/2}$.

Nous avons posé précédemment que $V = \alpha r^N$ donc $dV = \alpha N r^{N-1} dr$ d'où :

$$\begin{aligned}
 \pi^{N/2} &= \alpha N \int_0^{+\infty} r^{N-1} e^{-r^2} dr \\
 &= \alpha N \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} X^{N/2} e^{-X} dX
 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons la fonction gamma définie par $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ d'où :

$$\alpha = \frac{2\pi^{N/2}}{N\Gamma(N/2)}$$

Le volume d'une hypersphère de rayon r a donc pour expression :

$$V = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2 + 1)} r^N \quad (5.1)$$

avec $\Gamma(N/2 + 1) = \frac{N}{2} \Gamma(N/2)$.

5.2 Quelques propriétés étonnantes

Remarquons déjà que le volume d'une hypersphère tend vers 0 lorsque N tends vers l'infini. Pour une valeur donnée de r , le volume passe par un maximum pour une dimension particulière puis décroît.

Considérons maintenant une hypersphère de rayon $r = 1$. Cette sphère est inscrite dans un cube de volume 2^N . Nous arrivons donc à la conclusion que le volume de la sphère devient nulle lorsque N tends vers l'infini alors que le volume du cube dans lequel cette sphère est inscrit tend vers l'infini. Le volume de hypersphère est donc négligeable devant le volume de l'hypercube circonscrit.

Finiissons en remarquant que le rapport entre le volume d'une hypersphère de rayon $R - \delta R$ sur une hypersphère de rayon R a pour expression $\frac{(R-\delta R)^N}{R^N} = \left(1 - \frac{\delta R}{R}\right)^N$. Nous pouvons prendre δR aussi petit que possible, ce rapport tend vers zéro quand N augmente. Ainsi, **le volume d'une hypersphère est quasi intégralement contenu près de sa surface.**