

CHAPITRE 2

L'approximation de Stirling

Objectifs :

- utiliser l'approximation de Stirling

Ce chapitre est purement mathématique. Nous allons y établir un résultat que nous allons abondamment utiliser par la suite : l'approximation de Stirling.

2.1 Fonction gamma

Commençons par définir une intégrale particulièrement utile à mémoriser :

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad (2.1)$$

Nous pouvons démontrer cette relation par récurrence. $\int_0^{+\infty} e^{-x} = 1$ montre l'initialisation. Nous avons :

$$\begin{aligned} (n+1)! &= \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx \\ &= -[x^{n+1} e^{-x}]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \\ &= (n+1)n! \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation.

Nous pouvons maintenant généraliser et introduire la fonction gamma qui permet de définir le factoriel de nombre non entier. Par définition :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

d'où $\Gamma(n) = (n-1)!$.

2.2 L'approximation de Stirling

L'approximation de Stirling consiste à obtenir une valeur approchée de $\ln n!$. Nous allons partir de l'expression intégrale de $n!$ pour l'obtenir. Pour évaluer $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$, nous pouvons déjà remarquer que x^n est une fonction rapidement croissante alors que e^{-x} est une fonction qui décroît rapidement. Ainsi, la valeur de l'intégrale doit principalement être due à l'aire sous la courbe autour du maximum. Puisque nous voulons une expression approchée de $\ln n!$, nous allons poser $e^{f(x)} = x^n e^{-x}$ d'où $f(x) = n \ln x - x$. La position du maximum de la fonction f est donnée par $\frac{df}{dx} = 0$ soit $\frac{n}{x} - 1 = 0$. La fonction f admet son maximum en $x = n$ et nous pouvons faire un développement de Taylor de $f(x)$ au voisinage de n à l'ordre 2 en $x - n$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} f(n + (x - n)) &= f(n) + (x - n) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=n} + \frac{(x - n)^2}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=n} \\ &= n \ln n - n - \frac{(x - n)^2}{2n} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} n! &= \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \\ &\simeq e^{n \ln n - n} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-n)^2}{2n}} dx \end{aligned}$$

Puisque l'intégrand est centré en $x = n$ avec un écart type de $\sqrt{n}$, nous pouvons étendre la limite inférieure sans changer le résultat de l'intégrale, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} n! &\simeq e^{n \ln n - n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-n)^2}{2n}} dx \\ &\simeq e^{n \ln n - n} \sqrt{2\pi n} \end{aligned}$$

d'où :

$$\ln n! \simeq n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \quad (2.2)$$

Cette dernière relation est la première version de l'approximation de Stirling. Lorsque n est très grand, nous pouvons négliger le dernier terme de l'équation précédente pour obtenir la seconde version de l'approximation de Stirling :

$\ln n! \simeq n \ln n - n$

(2.3)