Fluide
TD 8 : Écoulement parfait d'un fluide - Théorème de Bernoulli

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

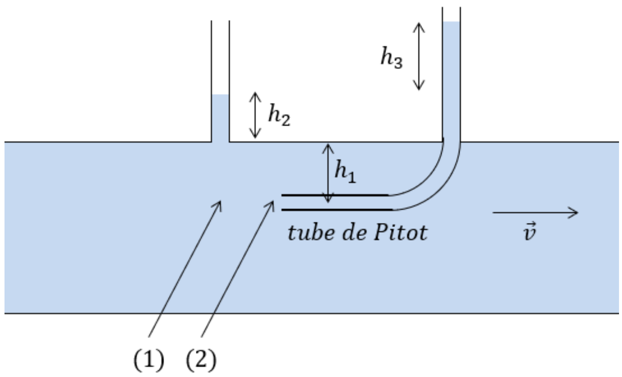
1 Les savoir-faire

Savoir utiliser le théorème de Bernoulli

Exercice 1 : Mesure de vitesse d'un écoulement

1. Rappeler l'expression du théorème de Bernoulli et les conditions d'application. Que représente les différents termes ?

La figure suivante montre un tube de Pitot placé dans une canalisation d'eau horizontale.

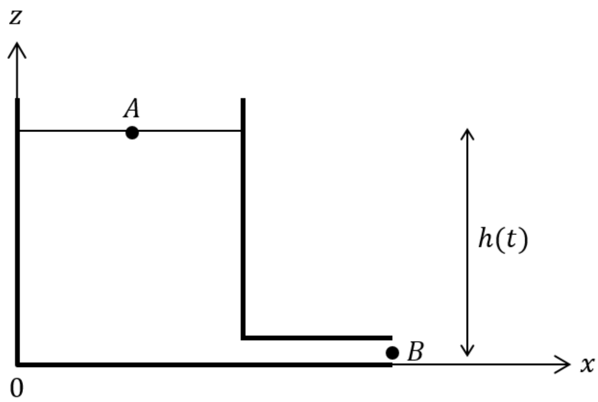


2. Déterminer les expressions des pressions P_1 et P_2 aux points 1 et 2 en fonction de h_1, h_2 et h_3.
3. Montrer que $\frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2 - P_1}{\rho}$.
4. On donne $h_3 = 10\,\text{cm}$. Calculer la vitesse de l'écoulement.

Savoir établir la loi de Torricelli

Exercice 2 : Vidange d'un réservoir

Un réservoir cylindrique de section S rempli d'eau se vide par un orifice de section $s << S$ situé à sa base. La vitesse du fluide à la surface libre du récipient a pour expression $\vec{v}_A = -V(t)\vec{u}_z$. La vitesse du fluide en B a pour expression $\vec{v}_B = v(t)\vec{u}_x$. On suppose l'écoulement parfait. On note $h(t)$ la hauteur d'eau dans le réservoir.



1. Relier $v(t)$, $V(t)$, s et S à l'aide de la conservation du débit.
2. Montrer à partir du théorème de Bernoulli que $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ dans le cas $s << S$.
3. Montrer que le temps de vidange τ du réservoir a pour expression $\tau = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ où h_0 est la hauteur d'eau initiale.

Savoir utiliser l'équation d'Euler

Exercice 3 : Dépression associée à une tornade

Le champ de vitesse d'une tornade est modélisé par $\vec{v} = \omega r \vec{u}_\theta$ en coordonnées cylindriques. L'écoulement est considéré parfait. On note $P_0(z)$ la pression en $r = 0$.

1. Rappeler l'expression de l'équation d'Euler.
2. Déterminer l'expression du champ de pression en fonction de $P_0(z)$, ω et r dans l'écoulement en utilisant l'équation d'Euler.
3. En déduire l'expression de la constante de Bernoulli le long de chaque ligne de courant.

2 La mise en œuvre

Exercice 4 : Effet Vennturi

La figure suivante montre un tube de courant d'un écoulement parfait, incompressible homogène et stationnaire.

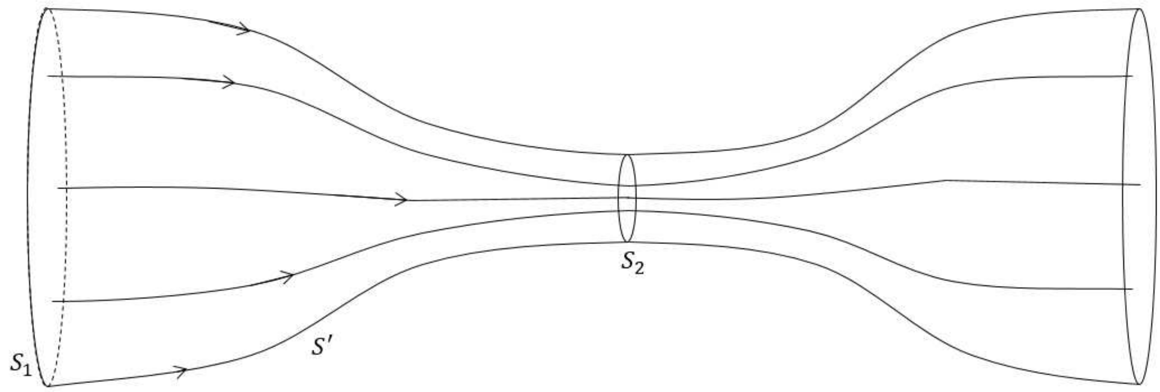
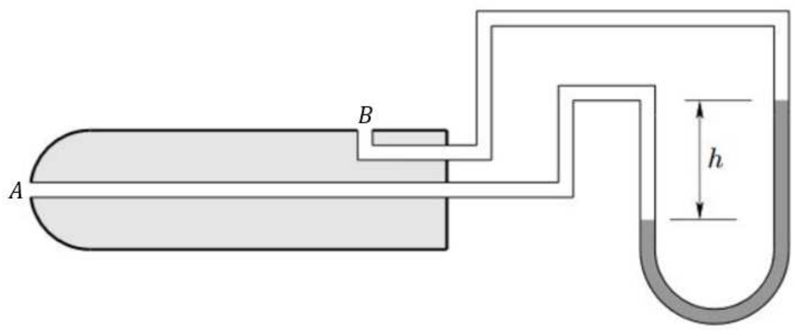


FIGURE 1 – La vitesse du fluide augmente au passage de l'étranglement.

1. Relier v_1, S_1, v_2 et S_2 où v_1 est la valeur moyenne de la vitesse en 1 et v_2 est la valeur moyenne de la vitesse en 2.
2. Montrer que la variation de pression $\Delta P = P_1 - P_2$ a pour expression $\Delta P = \rho \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right)$.
3. En déduire l'expression de ΔP en fonction de ρ, v_1, S_1 et S_2.

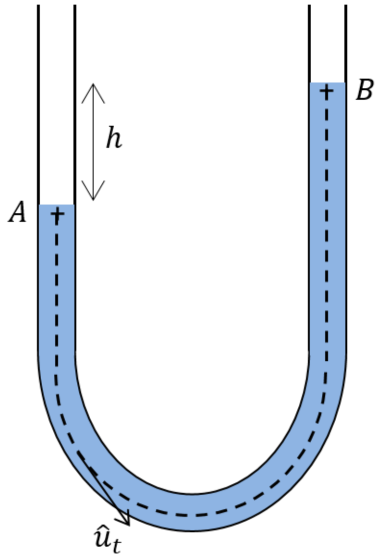
Exercice 5 : Sonde Pitot

La figure suivante montre le schéma d'un tube de Pitot utilisé dans l'aviation. Déterminer l'expression de h en fonction de la vitesse de l'écoulement par rapport à l'avion.



Exercice 6 : Tube en U

Du mercure est contenu dans un tube en U de section constante S et on note $h(t) = z_B(t) - z_A(t)$ la dénivellation entre la branche de droite et la branche de gauche. L'axe Oz est un axe vertical orienté positivement vers le haut. L'écoulement est parfait, incompressible et homogène de masse volumique ρ. Il est décrit par un champ des vitesses $v(M,t) = v(s,t)\vec{u}_t$. $\vec{u}_t$ est un vecteur tangent au contour moyen orienté de A à B, s est l'abscisse curviligne mesurée le long du contour moyen ; $s_A = 0$ et $s_B = L$ où SL est le volume total de mercure.



1. Montrer que $v(s,t)$ ne dépend pas de s et l'exprimer en fonction de $\dot{z_B}$. En déduire que $v(t) = \frac{1}{2}\dot{h}$.
2. Montrer que l'équation d'Euler s'écrit $\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \vec{\nabla}(\rho g z) + \vec{\nabla}P + \rho(\overrightarrow{rot}\ \vec{v}) \wedge \vec{v} = 0$
3. Intégrer l'équation précédente le long d'une ligne de courant entre A et B pour obtenir $\frac{1}{2}\ddot{h}L + gh = 0$
4. En déduire la période des oscillations.

Exercice 7 : Modélisation d'un cyclone

Nous allons aborder dans cet exercice la modélisation la plus simple d'un cyclone On assimile pour cela l'atmosphère à un écoulement parfait de masse volumique ρ et le cyclone à un tourbillon cylindrique d'axe Oz et de rayon a constant avec l'altitude z. On note $z = 0$ l'altitude au niveau de la mer. On suppose que l'écoulement dans le cyclone est stationnaire et compte tenu des symétries du problème, on peut supposer que le champ de vitesse est $\vec{v} = \vec{v}(r,z)$ et le champ de pression $P = P(r,z)$ dans un système de coordonnées cylindriques avec l'axe Oz orienté positivement vers le haut. Pour simplifier le problème, on fait l'hypothèse que le cyclone obéit à un tourbillon de Rankine, c'est-à-dire que la vorticité est nulle en dehors du cœur du tourbillon (de rayon a) et qu'elle est constante à l'intérieur tel que :

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{rot}\ \vec{v} = \omega\vec{u}_z \quad \forall\ r \leqslant a \quad \text{(région 1)}$$
$$\vec{\omega} = \overrightarrow{rot}\ \vec{v} = \vec{0} \quad \forall\ r > a \quad \text{(région 2)}$$

1. A l'aide de l'expression de la vorticité, montrer que la composante orthoradiale de la vitesse v_θ est indépendante de z.
2. A l'aide de l'expression de la vorticité, déterminer l'expression de v_θ dans la région 1 de l'écoulement, que l'on notera v_1, en fonction de r et ω. Utilisez le fait qu'il n'y a pas de singularité en $r = 0$.
3. Déterminer l'expression de $v_\theta = v_2$ dans la région 2 de l'écoulement en fonction de ω, a et r, compte tenu la continuité du champ de vitesse en $r = a$.
4. Tracer le graphe de v_θ en fonction de r. Que vaut la vitesse au centre du tourbillon ? Exprimer la vitesse maximale et préciser où est-elle atteinte. Que vaut la vitesse à l'infini ?

On suppose pour simplifier dans la suite que v_r et v_z sont nulles, bien que cette hypothèse soit peu réaliste pour un cyclone, compte tenu de la présence de forts courants ascendants au niveau du cœur du cyclone par exemple.

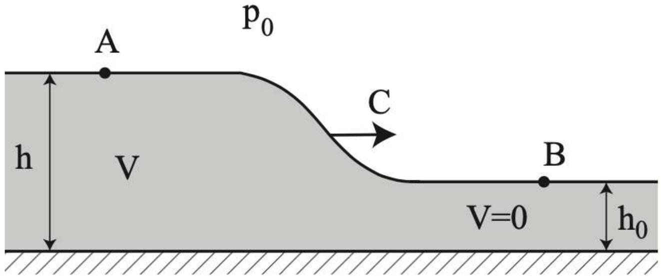
5. Rappeler l'équation d'Euler sous forme vectorielle.
6. Montrer que le terme non-linéaire est donné par $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{v_\theta^2}{r}\vec{u}_r$.
7. Projeter l'équation de Euler sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$.
8. Déterminer le champ de pression $P_2(r, z)$ du cyclone dans la région 2, en utilisant les deux projections de l'équation d'Euler. On note P_0 la pression infiniment loin du tourbillon en $z = 0$.
9. Énoncer le théorème de Bernoulli dans le cas particulier d'un écoulement irrotationnel (ce qui est bien le cas dans la région 2) et montrer que l'on peut retrouver $P_2(r, z)$ à partir de ce théorème.
10. Montrer le champ de pression $P_1(r, z)$ dans la région 1, en utilisant la continuité du champ de pression en $r = a$ pour déterminer une constante d'intégration, est donnée par :

$$p_1(r, z) = P_0 - \rho g z + \rho\omega^2\frac{(r^2 - 2a^2)}{8}$$

11. Déterminer la dépression ΔP générée entre le cœur du cyclone et un point situé à l'infini à la même altitude.
12. On suppose que le cyclone se trouve en pleine mer. Exprimer la hauteur H de la marée barométrique au niveau du cœur du tourbillon (hauteur de la mer au dessus de son niveau au repos aspirée par la dépression du cyclone).
13. Sachant que la vitesse v_θ maximale à la périphérie du cyclone est de 160 km/h, calculer ΔP et H.

Exercice 8 : Vague

On considère une vague d'amplitude $h - h_0$ se propageant à la vitesse C à la surface d'une couche horizontale de fluide au repos d'épaisseur uniforme h_0. Par rapport au support, le point A se déplace à une vitesse V et le point B a une vitesse nulle.



On se place dans le référentiel de la vague pour que l'écoulement soit stationnaire.

1. Déterminer l'expression du point A et du point B dans le référentiel de la vague.
2. Montrer que $V(V - 2C) = 2g(h_0 - h)$ par l'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B.
3. Trouver une deuxième équation reliant V et C à l'aide de la conservation du débit.
4. Exprimer la vitesse de propagation C de la vague et la vitesse V du fluide en fonction de h, h_0 et l'accélération de la pesanteur g.