Fluide
TD 7 : réponses

1 Les savoir-faire

Savoir utiliser la pression de stagnation

Exercice 1 : Mesure de vitesse d'un écoulement

1. L'équation $P + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z = cst$ représente la conservation de l'énergie d'une particule fluide. Il faut donc l'appliquer le long d'une ligne de courant. On se déplace orthogonalement à une ligne de courant pour aller du point (1) à la surface. On a donc $P_1 = P_0 + \rho g(h_1 + h_2)$. Le fluide est au repos entre le point (2) et la surface dans le tube. On a donc $P_2 = P_0 + \rho g(h_3 + h_2 + h_1)$.
2. La conservation de l'énergie d'une particule fluide en l'absence de frottements entre (1) et (2) donne $\frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2 - P_1}{\rho}$.
3. $\frac{v_1^2}{2} = gh_3$.

Savoir établir la loi de Torricelli

Exercice 2 : Vidange d'un réservoir

1. On considère l'eau incompressible, la conservation du débit implique $VS = vs$.
2. $s << S$, le niveau de la surface diminue suffisamment lentement pour que nous puissions considérer l'écoulement permanent. Autrement dit, nous pouvons négliger le terme $\rho\frac{\partial v}{\partial t}$ devant les autres termes dans la démonstration de l'équation de Bernoulli. C'est l'approximation du régime quasi-stationnaire (ARQS). Nous pouvons vérifier à la fin que cette approximation est bien vérifiée. Nous écrivons la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant qui va du point A au point B. Nous avons alors $P_0 + \rho g h = P_0 + \rho\frac{v^2}{2}$ d'où $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$. On vérifie que $\rho\frac{\partial v}{\partial t}$ est négligeable devant les autres termes puisque le taux de variation de h est très faible.
3. Voir le TD sur le débit pour la réponse à cette question.

Savoir utiliser l'équation d'Euler

Exercice 3 : Dépression associée à une tornade

1. Voir cours.
2. Pour avoir l'évolution de la pression en fonction de r, il faut projeter l'équation d'Euler sur $\vec{u}_r$. On obtient $-\rho\omega r = -\frac{\partial P}{\partial r}$ d'où $P = P_0(z) + \rho\omega\frac{r^2}{2}$.
3. $Cst = P_0(z) + \rho\omega r^2 + \rho g z$.

2 La mise en œuvre

Exercice 4 : Effet Vennturi

1. La conservation du débit donne $v_1 S_1 = v_2 S_2$.
2. Bernoulli le long d'une ligne de courant donne $\Delta P = \rho \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right)$.
3. On obtient donc $\Delta P = \rho \left(\frac{v_1^2 (\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1)}{2}\right)$.

Exercice 5 : Sonde Pitot

Le point A est un point d'arrêt. La pression au point A est donnée par Bernoulli le long d'une ligne de courant qui arrive en A. Nous avons donc $P_A = P_0 + \rho \frac{v^2}{2}$. L'ouverture au point B est orthogonal aux lignes de courant. Le point B mesure donc la pression statique $P_B = P_0$. Nous avons donc $P_A - P_B = \rho \frac{v^2}{2}$. Or $P_A - P_B = \rho g h$ d'où $h = \frac{v^2}{2g}$.

Exercice 6 : Tube en U

1. La conservation de la masse implique que v a la même valeur partout. Nous avons donc v qui ne dépend pas de s.
   $v = v_B = \dot{z_B}$ et $v_A = -v_B$. Nous posons $h = z_B - z_A$ d'où $\dot{h} = 2v$ soit $v = \frac{1}{2}\dot{h}$.
2. L'équation d'Euler s'écrit $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \vec{\nabla}(\rho g z) + \vec{\nabla} P + \rho(\overrightarrow{rot}\ \vec{v}) \wedge \vec{v} = 0$
3. Le long d'une ligne de courant, nous avons $\rho(\overrightarrow{rot}\ \vec{v}) \wedge \vec{v}.\vec{dl} = 0$ d'où $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.\int \vec{dl} + \int d\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \int d(\rho g z) + \int dP = 0$. On intègre entre A et B pour obtenir $\frac{1}{2}\ddot{h}L + gh = 0$
4. On a donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$

Exercice 7 : Modélisation d'un cyclone

Nous allons aborder dans cet exercice la modélisation la plus simple d'un cyclone On assimile pour cela l'atmosphère à un écoulement parfait de masse volumique ρ et le cyclone à un tourbillon cylindrique d'axe Oz et de rayon a constant avec l'altitude z. On note $z = 0$ l'altitude au niveau de la mer. On suppose que l'écoulement dans le cyclone est stationnaire et compte tenu des symétries du problème, on peut supposer que le champ de vitesse est $\vec{v} = \vec{v}(r, z)$ et le champ de pression $P = P(r, z)$ dans un système de coordonnées cylindriques avec l'axe Oz orienté positivement vers le haut. Pour simplifier le problème, on fait l'hypothèse que le cyclone obéit à un tourbillon de Rankine, c'est-à-dire que la vorticité est nulle en dehors du cœur du tourbillon (de rayon a) et qu'elle est constante à l'intérieur tel que :

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{rot}\ \vec{v} = \omega \vec{u}_z \quad \forall\ r \leqslant a \quad \text{(région 1)}$$
$$\vec{\omega} = \overrightarrow{rot}\ \vec{v} = \vec{0} \quad \forall\ r > a \quad \text{(région 2)}$$

1. A l'aide de l'expression de la vorticité, montrer que la composante orthoradiale de la vitesse v_θ est indépendante de z.
2. A l'aide de l'expression de la vorticité, déterminer l'expression de v_θ dans la région 1 de l'écoulement, que l'on notera v_1, en fonction de r et ω. Utilisez le fait qu'il n'y a pas de singularité en $r = 0$.

3. Déterminer l'expression de $v_\theta = v_2$ dans la région 2 de l'écoulement en fonction de ω, a et r, compte tenu la continuité du champ de vitesse en $r = a$.
4. Tracer le graphe de v_θ en fonction de r. Que vaut la vitesse au centre du tourbillon ? Exprimer la vitesse maximale et préciser où est-elle atteinte. Que vaut la vitesse à l'infini ?

On suppose pour simplifier dans la suite que v_r et v_z sont nulles, bien que cette hypothèse soit peu réaliste pour un cyclone, compte tenu de la présence de forts courants ascendants au niveau du cœur du cyclone par exemple.

5. Rappeler l'équation d'Euler sous forme vectorielle.
6. Montrer que le terme non-linéaire est donné par $(\vec{v}.\boldsymbol{\nabla})\vec{v} = -\frac{v_\theta^2}{r}\vec{u}_r$.
7. Projeter l'équation de Euler sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$.
8. Déterminer le champ de pression $P_2(r,z)$ du cyclone dans la région 2, en utilisant les deux projections de l'équation d'Euler. On note P_0 la pression infiniment loin du tourbillon en $z = 0$.
9. Énoncer le théorème de Bernoulli dans le cas particulier d'un écoulement irrotationnel (ce qui est bien le cas dans la région 2) et montrer que l'on peut retrouver $P_2(r,z)$ à partir de ce théorème.
10. Montrer le champ de pression $P_1(r,z)$ dans la région 1, en utilisant la continuité du champ de pression en $r = a$ pour déterminer une constante d'intégration, est donnée par :

$$p_1(r,z) = P_0 - \rho g z + \rho\omega^2 \frac{(r^2 - 2a^2)}{8}$$

11. Déterminer la dépression ΔP générée entre le cœur du cyclone et un point situé à l'infini à la même altitude.
12. On suppose que le cyclone se trouve en pleine mer. Exprimer la hauteur H de la marée barométrique au niveau du cœur du tourbillon (hauteur de la mer au dessus de son niveau au repos aspirée par la dépression du cyclone).
13. Sachant que la vitesse v_θ maximale à la périphérie du cyclone est de 160 km/h, calculer ΔP et H.

Exercice 8 : Vague

1. $v(A) = V - C$ et $v(B) = -C$ dans le référentiel de la vague.
2. Le théorème de Bernoulli entre les points A et B a pour expression $\frac{1}{2}\rho(V-C)^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho(-C)^2 + \rho g h_0$ d'où $V(V-2C) = 2g(h_0 - h)$.
3. La conservation du débit a pour expression $(V-C)h = -Ch_0$.
4. On obtient $V = (h-h_0)\sqrt{\frac{2g}{h+h_0}}$ et $C = h\sqrt{\frac{2g}{h+h_0}}$.