

Fluide

TD 7 : Introduction à l'équation de Navier-Stokes

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Pour bien commencer

Exercice 1 : L'équation de Navier-Stokes

1. Rappeler l'expression de l'équation de Navier-Stokes et ses conditions de validités.
2. Rappeler les conditions aux limites que doit respecter le fluide à l'interface avec un solide et à l'interface avec un autre fluide.
3. Déterminer l'expression du nombre de Reynolds.
4. Donner les trois composantes de l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes pour un champ de vitesse $\vec{v} = v_x(x, y, z)\hat{u}_x + v_y(x, y, z)\hat{u}_y + v_z(x, y, z)\hat{u}_z$ avec $\vec{g} = -g\hat{u}_z$.

2 Les savoir-faire

Savoir utiliser les conditions aux limites pour déterminer un écoulement visqueux

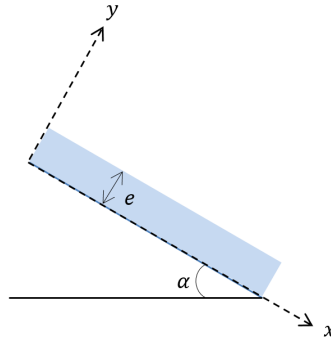
Exercice 2 : Couche de fluide horizontale

Une couche de fluide de masse volumique ρ et de viscosité η , d'épaisseur constante e s'écoule en régime permanent et laminaire sur une plaque confondue avec le plan $y = 0$ et se déplaçant à la vitesse $U\hat{u}_x$ constante. Le champ de vitesse du fluide est de la forme $\vec{v} = v(x, y)\hat{u}_x$ et le champ de pression est de la forme $P = P(x, y)$. L'écoulement est incompressible.

1. On néglige les effets de bord. Montrer grâce aux invariances que $v(x, y)$ et que $P(x, y)$ est indépendant de x . En déduire que l'accélération de la particule fluide est nulle.
2. Montrer que l'incompressibilité de l'écoulement permet également de trouver que le champ de vitesse est indépendant de x .
3. Projeter l'équation de NS (le poids par unité de volume doit y figurer) sur les axes Ox et Oy . Déterminer le champ de pression $P(x, y)$ en utilisant l'équation de NS projetée sur l'axe Oy .
4. L'air n'exerce pas de contraintes sur le fluide. En déduire l'expression de $v(y)$.

Exercice 3 : Écoulement laminaire sur un plan incliné

Une mince couche de fluide d'épaisseur e coule le long d'un plan incliné. L'écoulement est laminaire et le champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v(y)\hat{u}_x$. On néglige la viscosité de l'air devant la viscosité de l'eau.



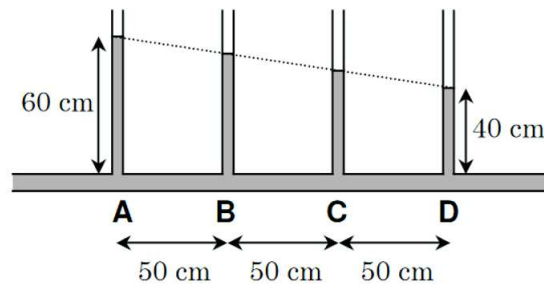
1. Est-ce que l'écoulement est incompressible ?
2. Projeter l'équation de Navier-Stokes sur les axes Ox et Oy .
3. Déterminer le champ de pression $P(x, y)$.
4. En déduire l'expression de $v(y)$ en fonction de e , α , η , ρ et g .
5. Déterminer l'expression du débit massique à travers une surface S de largeur L et de hauteur e perpendiculaire à l'axe Ox .
6. Calculer la vitesse maximale et le nombre de Reynolds pour $e = 1 \text{ mm}$ et $\alpha = 45^\circ$ pour de l'huile de viscosité dynamique $\eta = 1,0 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ et de même masse volumique que l'eau. Est-ce que le champ de vitesse choisi initialement est correct ?
7. Calculer la vitesse maximale et le nombre de Reynolds pour $e = 1 \text{ mm}$ et $\alpha = 45^\circ$ pour de l'eau de viscosité dynamique $\eta = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Est-ce que le champ de vitesse choisi initialement est correct ?

Savoir établir la loi de Poiseuille

Exercice 4 : Écoulement laminaire dans une conduite cylindrique

On étudie un écoulement permanent et visqueux dans une conduite cylindrique horizontale de section circulaire et d'axe Oz . On note R le rayon de la conduite et L sa longueur. On étudie l'écoulement en régime laminaire loin de l'entrée et de la sortie de la conduite. Cela revient à considérer la conduite infinie. L'écoulement est généré par un gradient de pression constant. La différence de pression est notée $\Delta P > 0$ de part et d'autre de la conduite.

1. Montrer en utilisant les invariances que le champ de vitesse est de la forme $\vec{v} = v(r)\hat{u}_z$.
2. Vérifier que l'incompressibilité de l'écoulement est vérifié.
3. Montrer que $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L}$.
4. Montrer que le Laplacien vectoriel s'exprime en fonction du laplacien scalaire. On donne $\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right)$ en coordonnées cylindriques.
5. Écrire l'équation de NS projetée sur l'axe Oz .
6. Montrer que la vitesse du fluide a pour expression $v_z(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$. Tracer le profil de la vitesse dans la conduite.
7. Déterminer l'expression du débit volumique.
8. Donner l'expression de la diminution de la pression en fonction du débit. En déduire l'expression de la résistance hydraulique en analogie avec l'électrocinétique.
9. Déterminer la résistance hydraulique de la portion de tuyau située entre le tube A et le tube D. Le débit du mercure de densité 13,6 qui circule dans la conduite est de $3 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.



Savoir déterminer un champ de pression

Exercice 5 : Champ de pression en coordonnées cartésiennes

On considère un écoulement incompressible à deux dimensions dont le champ de vitesse a pour expression $\vec{v} = (ax + b)\hat{u}_x + (-ay + cx)\hat{u}_y$. On considère que le vecteur accélération de la pesanteur est selon l'axe Oz . Montrer que le champ de pression a pour expression $P(x, y) = -\rho \left(\frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^2 y^2}{2} + abx + bcy \right) + C$ où C est une constante.

3 La mise en œuvre

Exercice 6 : Champ de pression en coordonnées cylindriques

On considère un écoulement incompressible dont le champ de vitesse a pour expression $\vec{v} = \frac{K}{r} \hat{u}_\theta$. On considère que le vecteur accélération de la pesanteur est selon l'axe Oz . Montrer que le champ de pression a pour expression $P(r, \theta) = -\frac{1}{2} \rho \frac{K^2}{r^2} + C$ où C est une constante.

Exercice 7 : Écoulement de Couette

Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η s'écoule en régime laminaire et stationnaire entre deux parois horizontales confondues avec les plan $z = \pm \frac{e}{2}$ avec un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v(z) \hat{u}_x$. La plaque supérieure se déplace à la vitesse $V \hat{u}_x$. La plaque inférieure est fixe. L'écoulement est incompressible et il n'y a pas d'autre pression appliquée que la pression hydrostatique due à la gravité.

1. Déterminer l'expression du champ de pression.
2. Déterminer l'expression du champ de vitesse.
3. Déterminer l'expression de la force de cisaillement par unité de surface qui agit sur la plaque inférieure.

Exercice 8 : Écoulement de Couette avec gradient de pression

Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η s'écoule en régime laminaire et stationnaire entre deux parois horizontales confondues avec les plan $z = \pm \frac{e}{2}$ avec un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v(z) \hat{u}_x$. La plaque supérieure se déplace à la vitesse $V \hat{u}_x$. La plaque inférieure est fixe. L'écoulement est incompressible et un gradient de pression constant est appliqué dans la direction Ox .

1. Déterminer l'expression du champ de pression et de vitesse.

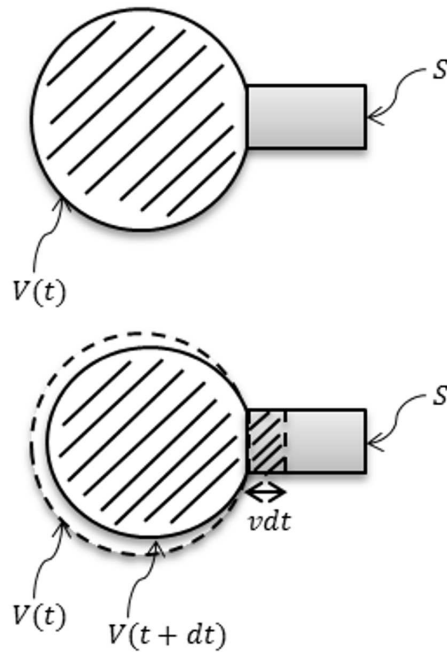
Exercice 9 : Dégonflement d'une bulle d'eau savonneuse

Nous étudions dans cet exercice le dégonflement d'une bulle d'eau savonneuse de rayon R à l'extrémité d'une paille de longueur L et de rayon r . L'expérience consiste à tremper l'extrémité d'une paille dans un verre d'eau savonneuse, à souffler pour faire une bulle puis à laisser la bulle se dégonfler. Nous mesurons ensuite le temps que met la bulle pour se dégonfler. L'objectif est de trouver une formule pouvant expliquer de quels paramètres dépend le temps que met la bulle à se dégonfler.

Nous allons faire l'hypothèse que l'écoulement de l'air dans la paille est laminaire et incompressible.

Lorsqu'une interface entre deux fluides n'est pas plane, il apparaît un saut de pression de part et d'autre de l'interface qui est donné par la loi de Laplace qui s'écrit $p_{air} - p_{eau} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ où R_1 et R_2 sont les rayons de courbures principaux de l'interface au point considéré et γ est la tension de surface de l'eau savonneuse.

1. Dédurre de la loi de Laplace que la surpression dans la bulle est donnée par $\Delta P = \frac{4\gamma}{R}$.
2. Rappeler l'expression du débit volumique d'air à travers la paille en régime permanent.
3. La figure suivante montre la conservation du volume d'air V dans la bulle entre deux instants séparés de dt . Dédurre de la conservation du volume d'air que $\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{r^4}{8\eta} \frac{\gamma}{R^3 L}$.



4. On note R_0 le rayon initiale de la bulle. Déterminer l'expression du rayon de la bulle en fonction de R_0 , γ , r , L , η et t .
5. En faisant l'hypothèse que notre modélisation reste valide jusqu'au dégonflement total de la bulle, montrer que le temps mis par la bulle pour se dégonfler a pour expression $T = R_0^4 \frac{2L\eta}{\gamma r^4}$.

Exercice 10 : Écoulement verticale

On étudie l'écoulement vertical d'un film d'huile d'épaisseur e le long d'un mur confondu avec l'axe Oz . L'écoulement est incompressible, laminaire et stationnaire et un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v(x)\hat{u}_z$. L'huile s'écoule uniquement sous l'action de son propre poids et on pose $\vec{g} = -g\hat{u}_z$.

1. Déterminer l'expression du champ de pression et de vitesse.

Exercice 11 : Nombre de capillaires

Au niveau des organes, le sang se déplace dans un grand nombre de vaisseaux capillaires. On désire modéliser cette portion du réseau sanguin en considérant qu'elle est constituée de vaisseaux capillaires identiques placés en parallèle. Chaque capillaire a une longueur de 1 mm, un rayon de $1\mu\text{m}$; la pression du sang passe de 30 mmHg à l'entrée du capillaire à 12 mmHg à la sortie. Si le cœur pompe 5 L de sang à la minute, quel doit être le nombre de capillaires? (La viscosité du sang est égale à 0,004 Pa.s.)