
Fluide

TD 6 : Introduction à l'équation de Navier-Stokes - solution

1 Pour bien commencer

Exercice 1 : L'équation de Navier-Stokes

1. $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v}$. Valide pour un fluide Newtonien incompressible.
2. $\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{solide}}$ et égalité des contraintes entre deux fluides.
3. Le rapport entre le terme d'inertie et le terme de viscosité a pour expression $Re = \frac{UL}{\nu}$ où L est l'ordre de grandeur de la distance sur laquelle la vitesse varie.
4. La projection de l'équation N-S selon l'axe Ox a pour expression $\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) v_x \right) = -\frac{\partial}{\partial x} P + \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x$

2 Les savoir-faire

Savoir utiliser les conditions aux limites pour déterminer un écoulement visqueux

Exercice 2 : Couche de fluide horizontale

1. Invariance par translation donc le champ de vitesse du fluide est de la forme $\vec{v} = v(y)\hat{u}_x$ et le champ de pression est de la forme $P = P(y)$. L'accélération de la particule fluide a pour expression $\frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = v \frac{\partial}{\partial x} v = 0$.
2. $\text{div } \vec{v} = 0$ s'écrit $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ donc v_x ne peut pas dépendre de x dans le cas d'un écoulement incompressible.
3. L'équation de NS a pour expression $\rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v}$. La projection de l'équation de NS sur l'axe Ox a pour expression $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ et la projection de l'équation de NS sur l'axe Oy a pour expression $-\rho g - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Le champ de pression a donc pour expression $P = C - \rho g y$ où la constante C est déterminée grâce à la condition aux limites $P(y = e) = P_0$ d'où $P = P_0 + \rho g(e - y)$.
4. $v(y) = Ay + B$. Les conditions aux limites impliquent que $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ en $y = e$ donc $A = 0$ et $v(y = 0) = U$ donc $B = U$. Ainsi $v = U$.

Exercice 3 : Écoulement laminaire sur un plan incliné

1. Oui car $\text{div } \vec{v} = 0$.
2. L'équation de N-S a pour expression $\rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v}$. La projection de l'équation de N-S sur l'axe Ox a pour expression $\rho g \sin \alpha - \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. La projection de l'équation de N-S sur l'axe Oy a pour expression $-\rho g \cos \alpha - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.
3. L'intégration de l'équation de N-S selon l'axe Oy donne $P = -\rho g \cos \alpha y + C(x)$. Nous avons $P(y = e) = P_0$ quelque soit x d'où $P(y) = P_0 + \rho g \cos \alpha(e - y)$.
4. Nous avons $\rho g \sin \alpha - \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ d'où $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\rho g \sin \alpha}{\eta} y + C$. La contrainte exercée par l'air sur le fluide est nulle, nous devons donc avoir $\frac{\partial v}{\partial y}(y = e) = 0$ d'où $C = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} e$. Une nouvelle intégration conduit à $v = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} y(e - \frac{y}{2}) + C$. Puisque $v(y = 0) = 0$, nous avons $C = 0$ d'où $v = \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} y(e - \frac{y}{2})$.
5. $D_m = \rho L \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} \int_0^e y(e - \frac{y}{2}) dy = \rho L \frac{\rho g \sin \alpha e^3}{3\eta}$
6. $v_{max} = \frac{\rho g \sin \alpha e^2}{4\eta} = 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ et $Re = \frac{\rho L U}{\eta} = 10^{-2}$. Écoulement laminaire.
7. $v_{max} = \frac{\rho g \sin \alpha e^2}{4\eta} = 10 \text{ m s}^{-1}$ et $Re = \frac{\rho L U}{\eta} = 10^4$. Écoulement turbulent. Le champ de vitesse choisi au départ n'est pas correct.

Savoir établir la loi de Poiseuille

Exercice 4 : Écoulement laminaire dans une conduite cylindrique

On étudie un écoulement permanent et visqueux dans une conduite cylindrique horizontale de section circulaire et d'axe Oz . On note R le rayon de la conduite et L sa longueur. On étudie l'écoulement en régime laminaire loin de l'entrée et de la sortie de la conduite. Cela revient à considérer la conduite infinie. L'écoulement est généré par un gradient de pression constant. La différence de pression est notée ΔP de part et d'autre de la conduite.

1. L'écoulement est laminaire, le champ de vitesse doit alors respecter les symétries et les invariances d'où $\vec{v} = v(r)\hat{u}_z$.
2. $\text{div } \vec{v} = 0$. L'écoulement est incompressible.
3. $\hat{u}_z$ est un vecteur unitaire dont l'orientation reste fixe. Le Laplacien vectoriel s'exprime donc en fonction du laplacien scalaire. On donne $\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right)$ en coordonnées cylindriques.
4. L'équation de N-S projetée sur l'axe Oz a pour expression $-\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v(r) \right) = 0$. Le gradient de pression est constant, nous avons donc $P = Az + B$ d'où $P = -\frac{\Delta P}{L}z + P_1$. Ainsi $\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\Delta P}{L}$.
5. Nous avons donc $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v(r) \right) = -\frac{\Delta P}{4L\eta}$. Nous en déduisons que $r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\Delta P r^2}{2L\eta} + C$. Le gradient de vitesse ne peut pas être infini en $r = 0$, nous avons donc $C = 0$ d'où $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\Delta P r}{2L\eta}$. Une autre intégration conduit à $v = -\frac{\Delta P r^2}{4L\eta} + C$. La vitesse est nulle en $r = R$ d'où $v_z(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$. Le profil de la vitesse dans la conduite est donc parabolique.
6. Le débit volumique a pour expression $D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P$.
7. Nous avons $\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} D_V$. La résistance hydraulique d'une conduite cylindrique a donc pour expression $R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$.
8. $\Delta P = \rho g h$ d'où $R = \frac{\rho g h}{D_v} = \frac{13,6 \times 1000 \times 20 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-6}} = 9 \times 10^8 \text{ Pa s}^{-3} \text{ m}^{-1}$

Savoir déterminer un champ de pression

Exercice 5 : Champ de pression en coordonnées cartésiennes

$\Delta \vec{v} = \vec{0}$ et $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (ax + b)a\hat{u}_x + (ax + b)c\hat{u}_y - (-ay + cx)a\hat{u}_y$. L'équation de NS a donc pour expression $-\frac{\partial P}{\partial x}\hat{u}_x - \frac{\partial P}{\partial y}\hat{u}_y = \rho(ax + b)a\hat{u}_x + \rho(ax + b)c\hat{u}_y - \rho(-ay + cx)a\hat{u}_y$ d'où $\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho(ax + b)a$ soit $P = -\rho \left(\frac{a^2 x^2}{2} + abx \right) + P(y)$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = \rho(ax + b)c + \rho(-ay + cx)a$ d'où $P = -\rho \left(\frac{a^2 y^2}{2} + bcy \right) + P(x)$ d'où $P(x, y) = -\rho \left(\frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^2 y^2}{2} + abx + bcy \right) + C$ où C est une constante.

3 La mise en œuvre

Exercice 6 : Champ de pression en coordonnées cylindriques

On suit la même procédure que dans l'exercice précédent pour montrer que le champ de pression a pour expression $P(r, \theta) = -\frac{1}{2}\rho \frac{K^2}{r^2} + C$ où C est une constante.

Exercice 7 : Écoulement de Couette

1. L'équation de N-S projetée sur un axe Oz a pour expression $\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$ d'où $P = \rho g \left(\frac{e}{2} - z \right) + P_0$ en utilisant la condition aux limites $P(z = e/2) = P_0$.
2. L'équation de N-S projetée sur un axe Ox a pour expression $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$ d'où $v = Az + B$. Les conditions aux limites $v(z = -e/2) = 0$ et $v(z = e/2) = V$ impliquent $v = V \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{e} \right)$.
3. $\frac{\vec{F}}{S} = \eta \frac{V}{e} \hat{u}_x$.

Exercice 8 : Écoulement de Couette avec gradient de pression

1. L'équation de N-S projetée sur un axe Oz a pour expression $\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$ d'où $P = \rho g(\frac{e}{2} - z) + P_0$ en utilisant la condition aux limites $P(z = e/2) = P_0$.

L'équation de N-S projetée sur un axe Ox a pour expression $-\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$ avec $\frac{\partial P}{\partial x} = cst$. Nous en déduisons $v = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$. Les conditions aux limites $v(z = -e/2) = 0$ et $v(z = e/2) = V$ impliquent $v = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \left(z^2 - \frac{e^2}{4} \right) + V \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{e} \right)$

Exercice 9 : Écoulement verticale

1. La projection de N-S sur un axe Ox a pour expression $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ quelque soit z donc la pression est constante dans le fluide.

La projection de N-S sur un axe Oz a pour expression $-\rho g + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ d'où $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\rho g}{\eta} x + C_1$. La force de viscosité exercée par le fluide à l'interface est nulle d'où $C_1 = -\frac{\rho g}{\eta} e$. Une nouvelle intégration conduit à $v = \frac{\rho g}{\eta} \frac{x^2}{2} - \frac{\rho g}{\eta} ex + C_2$. La vitesse est nulle en $x = 0$ d'où $v = \frac{\rho g}{\eta} \left(\frac{x^2}{2} - ex \right)$.

Exercice 10 : Nombre de capillaires

Un mm de mercure correspond à une pression ρgh où ρ est la masse volumique du mercure et h vaut 1 mm d'où $\Delta P = 4 \times 10^3$ Pa. La résistance d'un capillaire a pour expression $R = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$. Les capillaires sont en parallèles donc $R_{eq} = \frac{R}{N}$ d'où $N = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \frac{D_V}{\Delta P} = \frac{8 \cdot 0.004 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 10^{-24}} \frac{8,3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^3} = 2 \times 10^{11}$.