Fluide
TD 5 : Débits et conservation de la masse

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire

Savoir calculer un débit

Exercice 1 : Débit massique

Soit un écoulement incompressible d'un fluide de masse volumique ρ dont le champ de vitesse est donné en coordonnées cylindriques par :

$$\vec{v}(r, \theta, t) = \frac{C(t)}{2\pi r}\widehat{u}_r$$

Calculer le débit massique $D_m(t)$ à travers un cylindre d'axe Oz de rayon R et de hauteur h.

Exercice 2 : Débit d'énergie cinétique

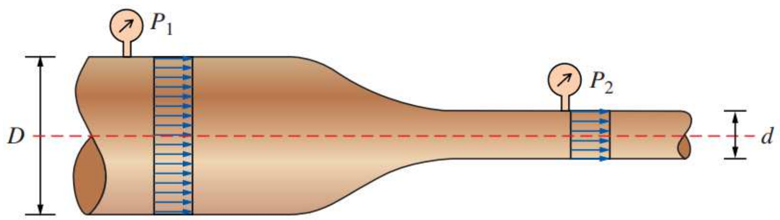
Nous cherchons dans cet exercice à estimer l'ordre de grandeur de la puissance que peut produire une éolienne. Nous considérons une éolienne avec un rendement de 50 %, cela signifie que l'éolienne convertit 50 % de l'énergie cinétique du vent en énergie électrique.

1. Rappeler l'expression du débit volumique du vent qui passe à travers une éolienne de surface S.
2. En déduire l'expression du débit d'énergie cinétique qui passe à travers une éolienne de surface S.
3. Calculer la puissance électrique que peut fournir une éolienne de 50 m de diamètre dans un vent de $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. La masse volumique de l'air est de $1{,}2\,\mathrm{g\,L^{-1}}$.
4. L'ordre de grandeur de la consommation électrique en France est de l'ordre de 100 GW. Calculer l'ordre de grandeur du nombre d'éoliennes qui permettrait de couvrir les besoins énergétiques de la France.

Savoir effectuer un bilan massique en régime permanent

Exercice 3 : Écoulement dans une tuyère 1

Soit un écoulement d'air dans une conduite possédant un rétrécissement. La température de l'écoulement reste constante. On donne $P_1 = 50\,\text{kPa}$, $P_2 = 10\,\text{kPa}$, $D = 3d$ et $v_2 = 30\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Calculer la valeur de v_1.



Exercice 4 : Écoulement dans une tuyère 2

Soit un écoulement incompressible de fluide dans une conduite possédant un rétrécissement. La section diminue de S_1 vers S_2. La vitesse du fluide est supposée uniforme sur une section et parallèle à l'axe de la tuyère. Déterminer la relation qui relie v_1, v_2, S_1 et S_2.

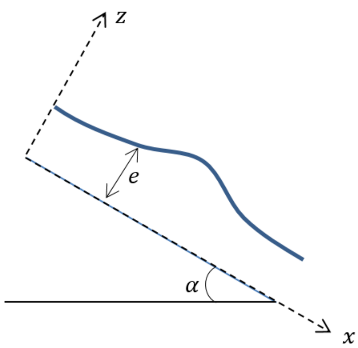
Savoir effectuer un bilan sur un système ouvert

Exercice 5 : Écoulement sur un plan incliné

Un fluide de masse volumique ρ constante s'écoule le long d'un plan incliné d'angle α. Le débit volumique du fluide à travers une section de profondeur L selon $\widehat{u}_y$ et d'épaisseur $e(x,t)$ vaut :

$$D_V(x,t) = \frac{g \sin\alpha L e^3(x,t)}{3\nu}$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide.



1. Établir l'équation gouvernant l'évolution temporelle de $e(x,t)$.
2. Comment évolue qualitativement la bosse de la figure.

Savoir retrouver l'équation locale de conservation de la masse

Exercice 6 : Équation locale de conservation de la masse

1. Établir l'équation locale de conservation de la masse à partir de l'équation de conservation de la masse.
2. En déduire que $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \; div \; \overrightarrow{v}$.
3. En déduire que $div \; \overrightarrow{v} = 0$ pour un écoulement incompressible.

2 La mise en œuvre

Exercice 7 : Débit volumique

L'écoulement d'un fluide de viscosité η entre deux plaques confondues avec les plans d'équations $z = \pm e/2$ est décrit par le champ des vitesses :

$$\vec{v} = \frac{\Delta p(e^2 - 4z^2)}{8\eta L}\widehat{u}_x$$

Où Δp est la surpression imposée à l'entrée $x = 0$ par rapport à la sortie $x = L$.

1. Déterminer l'expression de la vitesse max.
2. Tracer le profil du module de la vitesse.
3. Exprimer le débit volumique D_V à travers une surface S comprise entre $z = b$ et $z = -b$ et de largeur l suivant Oy. Traiter les cas $b \geqslant e/2$ et $b \leqslant e/2$.

Exercice 8 : Jet d'eau

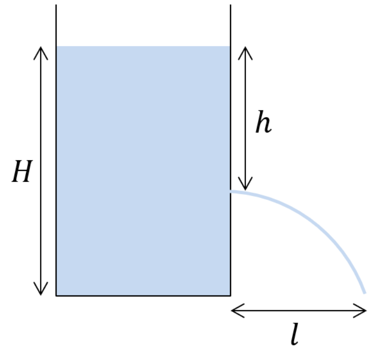
Il est écrit sur la page Wikipedia du grand jet d'eau de Genève (figure ci-dessous) que celui-ci atteint la hauteur max de 140 m.

1. Calculer la valeur de la vitesse de sortie de l'eau en $\mathrm{km\,h^{-1}}$.
2. Il est écrit sur la page Wikipedia que la valeur de la vitesse de sortie de l'eau est de $200\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Expliquer d'où provient la différence avec le résultat trouvé à la question précédente.

3. Le diamètre de la tuyère de sortie est de 16 cm. Calculer le débit volumique et massique d'eau éjectée.

Exercice 9 : Vidange d'un réservoir

La figure suivante montre la vidange d'un réservoir. Le réservoir est un cylindre de section S remplie d'eau sur une hauteur H. Un trou de section s est percée à une hauteur h. Le jet d'eau sort avec la vitesse $v = \sqrt{2gh}$.



1. Déterminer la distance l à laquelle le jet d'eau touche le sol.
2. Déterminer le temps que met le réservoir à se vider jusqu'à la hauteur $H - h$.
3. Calculer l'ordre de grandeur du temps à attendre pour vider une bouteille d'eau de 1,5L avec un trou de 1 mm^2 à la base de la bouteille.

Exercice 10 : Écoulement incompressible d'un fluide

Soit un écoulement incompressible de fluide à travers un cylindre de section S, muni d'une plaque de séparation, délimitant la section du cylindre en deux parties égales.

A l'entrée du cylindre, les vitesses du fluide sont v_1 et v_2 et en sortie, loin de la plaque de séparation, la vitesse du fluide est v_3. La vitesse du fluide est supposée uniforme sur une section et parallèle à l'axe du cylindre.

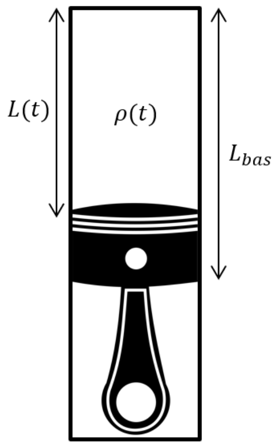
1. Déterminer v_3 en fonction de v_1 et v_2 ?
2. Examiner le cas particulier où $v_2 = \frac{v_1}{2}$.

Exercice 11 : Avis de recherche : composante manquante

Soit un écoulement stationnaire incompressible de composantes v_x, v_y et v_z avec $v_x = ax^2 + by^2 + cz^2$ et $v_z = axz + byz^2$ où a, b et c sont constants. Utiliser la condition d'incompressibilité de l'écoulement pour déterminer l'expression de la composante v_y.

Exercice 12 : Compression d'un mélange air-combustible

Un mélange d'air et de fuel est comprimé par un piston dans le cylindre d'un moteur à combustion interne. L'origine des coordonnées z est au sommet du cylindre et Oz est orienté positivement vers le bas. Le piston est supposé se déplacer à la vitesse constante v_p et la distance $L(t)$ varie selon $L(t) = L_{bas} - v_p t$. Le piston est en bas à $t = 0$. On ρ_0 la masse volumique du gaz à $t = 0$ et $\rho(t)$ la masse volumique du gaz à t.



1. On suppose que le champ de vitesse du gaz est suivant $-\widehat{u}_z$ lorsque le piston remonte et que la vitesse du gaz varie linéairement entre $z = 0$ et $z = L$. En déduire que $v = -v_p \frac{z}{L} \widehat{u}_z$.
2. Déterminer l'expression de $\rho(t)$ en utilisant l'équation locale de conservation de la masse.

Exercice 13 : Écoulement tourbillonnaire incompressible à deux dimensions

Considérons un écoulement à deux dimensions, incompressible dans les coordonnées cylindriques. La composante tangentielle de la vitesse a pour expression $v_\theta = \frac{C}{r}$ où C est une constante. Déterminer l'expression de la composante v_r.

Exercice 14 : Incompressibilité d'un écoulement à deux dimensions non stationnaire

On considère le champ de vitesse de suivant $\vec{v} = (0,5 + 0,8x)\widehat{u}_x + (1,5 + 2.5\sin(\omega t) - 0,8y)\widehat{u}_y$ où ω est une fréquence angulaire. Vérifié que l'écoulement peut-être considéré incompressible.

Exercice 15 : Équation de conservation de la masse dans un tuyau de section variable

Soit un écoulement compressible de fluide. En un point de cote x, à la date t, la masse volumique du fluide est notée $\rho(x,t)$ et sa vitesse $\vec{u}(x,t) = u(x,t)\widehat{u}_x$.

Cet écoulement s'effectue dans un tuyau de section $S(x,t)$ lentement variable en fonction des coordonnées d'espace et du temps. Écrire l'équation différentielle liant ces diverses grandeurs.