Fluide
TD 5 : Conservation de la masse - réponses

1 Les savoir-faire

Savoir calculer un débit

Exercice 1 : Débit massique

$D_m(t) = \iint \rho\vec{v}.d\vec{S} = \iint \rho v dS = \iint \rho \frac{C}{2\pi R} dS = \iint = \rho C H.$

Exercice 2 : Débit d'énergie cinétique

Voir le chapitre de cours correspondant pour les détails.

1. $D_V = vS$.
2. $D_{E_c} = \frac{1}{2}\rho v^2 D_V = \frac{1}{2}\rho v^3 S$.
3. $P = \frac{1}{4}\rho v^3 S$ A.N.
4. A.N.

Savoir effectuer un bilan massique en régime permanent

Exercice 3 : Écoulement dans une tuyère 1

En régime permanent, $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$. Pour un gaz parfait $P = \rho\frac{RT}{M}$ d'où $P_1 v_1 S_1 = P_2 v_2 S_2$ pour un écoulement isotherme d'où $v_1 = v_2 \frac{P_2}{P_1}\frac{d^2}{9d^2} = 0{,}67\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Exercice 4 : Écoulement dans une tuyère 2

Pour un écoulement incompressible, la masse de fluide contenue dans la tuyère est constante et le taux de variation de la masse dans la tuyère est donc nulle. Puisque $\frac{dm}{dt} = -\oiint \rho\vec{v}.d\vec{S}$ nous avons donc $\oiint \rho\vec{v}.d\vec{S} = 0$ d'où $\oiint \vec{v}.d\vec{S} = 0$ puisque ρ est constant pour un écoulement incompressible. Or $\oiint \vec{v}.d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{v}.d\vec{S}_1 + \iint_{S_{lat}} \vec{v}.d\vec{S}_{lat} + \iint_{S_2} \vec{v}.d\vec{S}_2 = 0$ or $\vec{v}.d\vec{S}_{lat} = 0$, $\vec{v}.d\vec{S}_1 = -vdS_1$ et $\vec{v}.d\vec{S}_2 = vdS_2$ d'où $v_1 S_1 = v_2 S_2$.

Savoir effectuer un bilan sur un système ouvert

Exercice 5 : Écoulement sur un plan incliné

1. Nous faisons un bilan sur un système ouvert de largeur infinitésimal dx pour obtenir $\rho L dx e(x,t+dt) - \rho L dx e(x,t) = \rho D_V(x,t)dt - \rho D_V(x+dx,t)dt$ d'où $L\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial D_V}{\partial x} = -L\frac{g\sin\alpha}{3\nu}\frac{\partial e^3}{\partial x}$ d'où $\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{g\sin\alpha e^2}{\nu}\frac{\partial e}{\partial x}$
2. La bosse se raidit.

Savoir retrouver l'équation locale de conservation de la masse

Exercice 6 : Équation locale de conservation de la masse

1. Voir cours.
2. Voir cours.
3. Voir cours.

2 La mise en œuvre

Exercice 7 : Débit volumique

1. La vitesse est max au centre de la conduite d'où $v_{max} = \frac{\Delta p e^2}{8\eta L}$.
2. Profil parabolique.
3. Dans le cas $b \leqslant e/2$: $D_V = \frac{l\Delta P}{8\eta L} 2b(e^2 - \frac{4}{3}b^2)$. Dans le cas $b \geqslant e/2$: $D_V = \frac{l\Delta p e^3}{12\eta L}$.

Exercice 8 : Jet d'eau

1. On utilise le théorème de l'énergie mécanique pour obtenir $v = \sqrt{2gh}$ d'où $v = 189\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.
2. frottements de l'air sur les gouttes d'eau.
3. $D_V = v\pi R^2 = 1\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Exercice 9 : Vidange d'un réservoir

1. Question de mécanique
2. On prend un système fixe : $\frac{dm}{dt} = -D_{m,sortant}$ (il n'y a pas de masse entrante). d'où $\rho S \frac{dH}{dt} = -\rho s \sqrt{2gh}$ or $dH = dh$ d'où $\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g} dt$ soit $\int_h^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\int_0^t dt$. On obtient $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{S}{s}$.
3. $t = \sqrt{\frac{2x0{,}4}{9{,}8}}\frac{10^4}{1} \sim 30\,\mathrm{min}$.

Exercice 10 : Écoulement incompressible d'un fluide

1. $v_3 = \frac{v_1+v_2}{2}$
2. $v_3 = \frac{3v_1}{4}$.

3 La mise en œuvre niveau 2

Exercice 11 : Avis de recherche : composante manquante

$v_y = -3axy - by^2 z + f(x,z)$.

Exercice 12 : Équation locale de conservation de la masse

1. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$.
2. L'équation précédente se réécrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\rho + \rho \; div \; \overrightarrow{v} = 0$. On introduit la dérivée particulaire pour en déduire que $\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\rho \; div \; \overrightarrow{v}$.
3. $\rho = cst$ pour un écoulement incompressible donc $div \; \overrightarrow{v} = 0$.

Exercice 13 : Compression d'un mélange air-combustible

1. $v = Az + B$ puisque la vitesse varie linéairement entre $z = 0$ et $z = L$. La vitesse du gaz est égale à la vitesse du piston en $z = L$ et est nulle en $z = 0$. Nous avons donc $B = 0$ et $v(z = L) = -v_p \widehat{u}_z$ d'où $B = -\frac{v_p}{L}$. Nous obtenons donc $v = -v_p \frac{z}{L} \widehat{u}_z$.
2. L'équation $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\rho \vec{v})$ donne $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{v_p}{L}$ d'où $\rho = \rho_0 e^{\frac{v_p}{L} t}$.

Exercice 14 : Écoulement tourbillonnaire incompressible à deux dimensions

L'écoulement est incompressible donc $div \; \overrightarrow{v} = 0$ d'où $\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$ d'où $\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0$. Nous obtenons ainsi $v_r = \frac{r}{r_0} v_{r_0}$.

Exercice 15 : Incompressibilité d'un écoulement à deux dimensions non stationnaire

Nous avons bien $div \; \overrightarrow{v} = 0$. L'écoulement est donc incompressible.

Exercice 16 : Équation de conservation de la masse dans un tuyau de section variable

On fait un bilan sur un système ouvert pour obtenir $\rho(x, t+dt) S(x, t+dt) dx - \rho(x, t) S(x, t) dx = u(x, t) S(x, t) \rho(x, t) dt - u(x + dx, t) S(x + dx, t) \rho(x + dx, t) dt$ d'où $\frac{\partial (\rho S)}{\partial t} = -\frac{\partial (\rho u s)}{\partial x}$.