

Fluide

TD 4 : Cinématique des fluides - partie 2

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire

Connaître la signification physique de la divergence et du rotationnel du champ de vitesse

Exercice 1 : Champ de vitesse 1

Soit $\vec{v} = a_1 x \hat{u}_x + b_1 y \hat{u}_y$.

1. Déterminer l'expression de $\text{div } \vec{v}$.
2. Déterminer l'expression de $\vec{\text{rot}} \vec{v}$.
3. Tracer la forme de particule fluide de la figure 1 en $t + dt$ sachant que la figure montre la particule fluide au temps t .

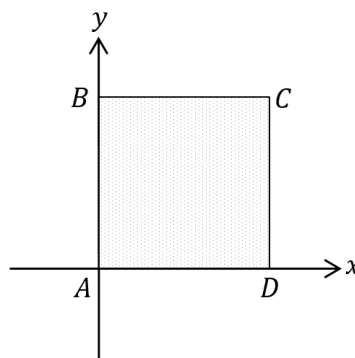


FIGURE 1 – Particule fluide carrée de côté L .

Exercice 2 : Champ de vitesse 2

Soit $\vec{v} = a_2 y \hat{u}_x + a_2 x \hat{u}_y$.

1. Déterminer l'expression de $\text{div } \vec{v}$.
2. Déterminer l'expression de $\vec{\text{rot}} \vec{v}$.
3. Tracer la forme de particule fluide de la figure 1 en $t + dt$ sachant que la figure montre la particule fluide au temps t .

Exercice 3 : Champ de vitesse 3

Soit $\vec{v} = -a_3 y \hat{u}_x + a_3 x \hat{u}_y$.

1. Déterminer l'expression de $\text{div } \vec{v}$.

2. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$.
3. Tracer la forme de particule fluide de la figure 1 en $t + dt$ sachant que la figure montre la particule fluide au temps t .

Savoir utiliser le potentiel des vitesses

Exercice 4 : Étude cinématique des ondes de gravité

Un vibreur impose une oscillation sinusoïdale de période T et de très faible amplitude à la surface d'un bassin de grandes dimensions, à fond plat et dont les bords sont transparents. On disperse des traceurs dans le bassin et on prend une photographie avec un temps de pose égal à la période T . On constate ainsi que :

- Les trajectoires des particules de fluide sont elliptiques.
- Les ellipses sont quasi-circulaires à la surface ($z = h$) et de plus en plus plates lorsqu'on s'enfonce vers le fond ($z = 0$).

Pour interpréter ces observations, on adopte un modèle d'écoulement incompressible et irrotationnel.

1. Rappeler l'équation que vérifie localement le champ de vitesse d'un écoulement incompressible.
2. Rappeler l'équation que vérifie localement le champ de vitesse d'un écoulement irrotationnel.
3. Montrer dans un système de coordonnées cartésiennes que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\nabla}\phi) = 0$ où ϕ est une fonction scalaire. En déduire que le champ de vitesse d'un écoulement irrotationnel dérive d'un potentiel des vitesses ϕ .

Les observations des trajectoires nous incite à utiliser un potentiel des vitesses de la forme $\phi = f(z) \cos(\omega t - kx)$ pour décrire l'écoulement.

4. Établir l'équation différentielle dont est solution $f(z)$.

Avant de résoudre cette équation différentielle, nous allons étudier la condition aux limites que doit respecter ϕ .

5. Justifier que $\frac{\partial \phi}{\partial z}(z = 0) = 0$ en $z = 0$.
6. En déduire $f(z)$ à une constante multiplicative A près. En déduire les composantes v_x et v_z du champ eulérien des vitesses.

2 La mise en œuvre

Exercice 5 : Exemple de potentiel des vitesses

Soit un écoulement bidimensionnel dont le potentiel des vitesses a pour expression $\varphi = K\theta$ en coordonnées polaires.

1. Déterminer l'expression du champ de vitesse.
2. Tracer les équipotentiels et les lignes de courants.

Soit un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesses a pour expression $\vec{v} = v_0 \hat{u}_x$.

3. Déterminer l'expression du potentiel des vitesses.

4. Tracer les équipotentiels et les lignes de courants.

Exercice 6 : Écoulement dans un dride droit

Soit un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse est défini, dans la région $x > 0$ et $y > 0$, par $\vec{v}(\vec{r}, t) = -kx\hat{u}_x + ky\hat{u}_y$.

1. Est-ce que cet écoulement est incompressible ? irrotationnel ?
2. Trouver une expression du potentiel des vitesses.

Exercice 7 : Écoulement entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons R_1 et R_2 , tournant autour de leur axe commun aux vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 peut être décrit par le champ de vitesse $\vec{v} = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\hat{u}_\theta$.

1. Calculer $\vec{rot} \vec{v}$ et $div \vec{v}$. Commentaires.