

Fluide

TD 3 : Cinématique des fluides

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

Le niveau de difficulté en calcul est représenté par l'échelle 

1 Les savoir-faire

Savoir utiliser la dérivée particulaire

Exercice 1 : Utilisation de la dérivée particulaire

Une sonde plongée dans un fluide de champ de vitesse $\vec{v} = (u_0 + bx)\hat{u}_x - by\hat{u}_y$ permet de mesurer le champ de pression qui a pour expression $P = P_0 - \frac{\rho}{2}(2u_0bx + b^2(x^2 + y^2))$.

1. Déterminer le taux de variation de la pression d'une particule fluide que l'on suit des yeux.

Savoir déterminer l'accélération d'une particule fluide

Exercice 2 : Utilisation de la dérivée particulaire

Soit un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse est défini, dans la région $x > 0$ et $y > 0$, par $\vec{v}(\vec{r}, t) = -kx\hat{u}_x + ky\hat{u}_y$.

1. Déterminer l'accélération d'une particule fluide.
2. Même question avec le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{x}{1+bt}b\hat{u}_x$.
3. Même question avec le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{x}{1+bt}b\hat{u}_x + kxy\hat{u}_y$.
4. Même question avec le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t) = -ky\hat{u}_x + kx\hat{u}_y$ dans le plan (x, y) .

Exercice 3 : Différentes images d'un écoulement ☐

1. L'image suivante montre-t-elle des lignes de courant, des trajectoires ou des lignes d'émission ?

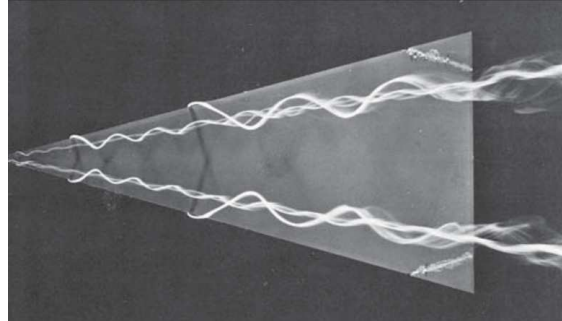


FIGURE 1 – Visualisation d'un écoulement au-dessus d'une aile delta. L'image est obtenue en injectant un colorant dans l'eau depuis des buses au-dessous de l'aile.

2. L'image suivante montre-t-elle des lignes de courant, des trajectoires ou des lignes d'émission ?

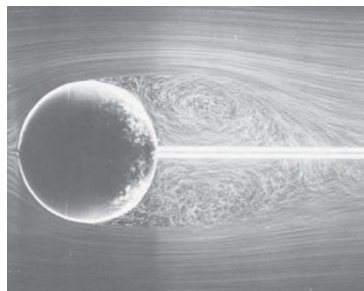


FIGURE 2 – Visualisation d'un écoulement autour d'une sphère. L'image est obtenue en prenant une photo avec un long temps d'exposition de petites bulles d'air injectées dans l'écoulement.

Savoir déterminer l'expression d'une ligne de courant et d'une trajectoire

Exercice 4 : Écoulement dans un dièdre droit ☒

Soit un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse est défini, dans la région $x > 0$ et $y > 0$, par $\vec{v}(\vec{r}, t) = -kx\hat{u}_x + ky\hat{u}_y$.

1. Déterminer les lignes de courants.
2. Déterminer la trajectoire des particules.
3. En déduire que les lignes de courants et les trajectoires sont identiques et que la famille de courbes obtenues sont des hyperboles équilatères.

Savoir déterminer l'accélération d'une particule fluide dans un système de coordonnées non cartésiennes

Exercice 5 : Tornado !

Dans le modèle de la tornade, le champ de vitesse est de la forme, dans un système de coordonnées cylindriques :

- pour $r < a$: $\vec{v}(r) = r\Omega\hat{u}_\theta$
- pour $r > a$: $\vec{v}(r) = \frac{\Omega a^2}{r}\hat{u}_\theta$

1. Déterminer l'accélération d'une particule fluide en tout point de l'espace.

2 La mise en œuvre

Exercice 6 : Écoulement dans un plan

Soit un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t) = -ky\hat{u}_x + kx\hat{u}_y$ dans le plan (x, y) .

1. Déterminer l'accélération d'une particule fluide.
2. Déterminer les lignes de courants.
3. Déterminer la trajectoire des particules.

Exercice 7 : Accélération d'une particule fluide

On considère l'écoulement d'un fluide entre l'infini et le plan $y = 0$ animé d'un mouvement oscillant de la forme $x = a \sin(\omega t)$.

On propose un champ de vitesse du fluide de la forme :

$$\vec{v}(x, y, t) = a\omega e^{-ky} \cos(\omega t - ky)\hat{u}_x$$

1. Déterminer l'accélération d'une particule fluide.
2. Déterminer la trajectoire d'une particule fluide.
3. Déterminer l'équation des lignes de courant.

Exercice 8 : Ecoulement dans une tuyère

L'écoulement d'un fluide dans une tuyère a pour champ de champ de vitesse $\vec{v} = (u_0 + bx)\hat{u}_x - by\hat{u}_y$.

1. Tracer qualitativement les vecteurs vitesses aux points $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(1, -1)$.
2. Déterminer l'accélération d'une particule fluide.

Exercice 9 : Écoulement entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons R_1 et R_2 , tournant autour de leur axe commun aux vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 peut être décrit par le champ de vitesse $\vec{v} = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\hat{u}_\theta$.

1. Déterminer les constantes A et B en écrivant la continuité entre la vitesse du fluide et des cylindres en R_1 et R_2 .

2. Commenter le cas $\Omega_1 = \Omega_2$.
3. Déterminer l'accélération d'une particule fluide.

Exercice 10 : Étude cinématique d'une tornade

On décrit une tornade par un écoulement incompressible à symétrie cylindrique autour d'un axe Oz qui est décrit en coordonnées cylindriques par un champ de vitesses de la forme $\vec{v} = v_\theta(r)\hat{u}_\theta$ et un vecteur-tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}r\vec{\omega}\vec{v}$ connu. $\vec{\Omega} = \Omega_0\hat{u}_z$ est uniforme au sein de la tornade, c'est-à-dire dans le cylindre de rayon $r \leq a$ et Ω est nul pour $r > a$.

1. En utilisant le théorème de Stokes sur un cercle de rayon r , établir l'expression de $v_\theta(r)$ d'une part pour $r \leq a$ et d'autre part pour $r \geq a$. Où la norme de la vitesse est-elle maximale ?