Fluide
TD 1 : Les fluides au repos - la pression - réponses

1 Les savoir-faire

Savoir établir la loi de l'équilibre hydrostatique

Exercice 1 : Équilibre hydrostatique

1. On isole par la pensée une tranche fixe de fluide d'épaisseur infinitésimale dz située entre z et $z + dz$. On prend ensuite un parallélépipède rectangle de surface dS et de hauteur dz. Ce volume contient une masse dm de fluide. Le principe d'inertie implique que la somme de forces qui s'exercent sur cette tranche est égale au vecteur nul. Nous avons donc $\vec{F}(z)+\vec{F}(z+dz)+dm\vec{g} = \vec{0}$. La projection sur de cette équation sur un axe vertical s'écrit $-F(z)+F(z+dz)+dm\, g = 0$ soit $(-p(z) + p(z + dz))\, dS+ dm\, g = 0$ où p est la pression.
2. Nous obtenons donc $\frac{dP}{dz} = -\frac{dmg}{dV}$ où dV est le volume considérée soit $\frac{dP}{dz} = -\rho g$.
3. Avec un axe orienté positivement vers le bas, nous obtenons $\frac{dP}{dz} = \rho g$. Pour un fluide tel que $\rho = cst$, nous obtenons $P = P_0 + \rho g z$.

Savoir calculer la pression dans un liquide

Exercice 2 : Plongée

La pression hydrostatique en un point M dans l'eau situé à la profondeur h a pour expression : $P(M) = P(h) = P_0 + \rho g h$ où P_0 est la pression atmosphérique et ρ la masse volumique de l'eau. La pression qui s'exerce sur les tympans lorsqu'on plonge à une profondeur h vaut donc $P(h) - P_0 = \rho g h$. Cette surpression vaut 0,17 bar à $h = 1{,}80$ m et 0,5 bar à $h = 5$ m.

Exercice 3 : Profil de pression

On a $P(z) = P_{atm} + \rho_{huile} g z$ dans l'huile et $P(z) = P_{atm} + \rho_{huile} g h_1 + \rho_{eau} g z$ dans l'eau. On a $P(h_1 + h_2) = P_{atm} + \rho_{huile} g h_1 + \rho_{eau} g h_2$.

Savoir calculer une force pressante

Exercice 4 : Barrage

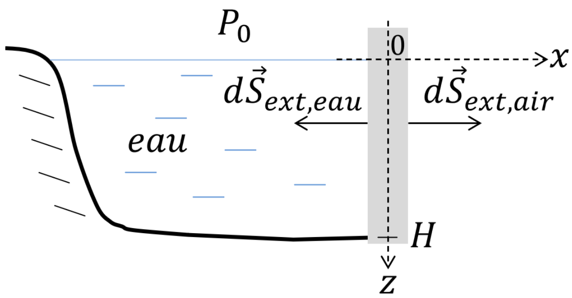
1. Soit un élément infinitésimal du barrage. La force pressante qui s'exerce sur cet élément est donnée, par définition, par $d\vec{F} = -P\ d\vec{S}_{ext}$ où $d\vec{S}_{ext}$ est un vecteur orthogonal à la surface et dirigé vers l'extérieur. La pression hydrostatique en un point M situé à la profondeur z a pour expression : $P(M) = P_0 + \rho_0 g z$. La force pressante exercée par l'eau sur le barrage est donc donnée par $\vec{F}_{eau/barrage} = \iint_S (P_0 + \rho_0 g z)\, d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = -d\vec{S}_{ext,eau}$.
Le barrage est symétrique par rapport à un plan orthogonal au barrage. Le vecteur force, contenu dans le plan de symétrie, est donc orthogonal au barrage. Nous avons donc $\vec{F}_{eau/barrage} = \iint_S (P_0 + \rho_0 g z)\, dS \vec{u}_x$ et $\vec{F}_{air/barrage} = -\iint_S P_0\ dS\vec{u}_x$. La force totale s'exerçant sur le barrage a donc pour expression :
$$\vec{F} = \vec{F}_{eau/barrage} + \vec{F}_{air/barrage} = \iint_S \rho_0 g z dS \vec{u}_x = \int_0^H \rho_0 g z l dz = \rho_0 g l \frac{H^2}{2} \vec{u}_x$$


FIGURE 1 – Schéma du barrage.

2. Notons que cette dernière expression peut se réécrire $\vec{F} = \rho_0 g \frac{H}{2} S \vec{u}_x$ où S est la surface du barrage et $\rho_0 g \frac{H}{2}$ est la pression hydrostatique à mi-profondeur.

Savoir utiliser la loi des gaz parfaits

Exercice 5 : Plongée sous-marine sans bouteille

1. $P(z) = P_{atm} + \rho g z$.
2. $V(z) = \frac{nRT_0}{P(z)}$ or $P_{atm} V_M = nRT_0$ d'où $V(z) = \frac{P_{atm}}{P(z)} V_M$. Le volume des poumons du plongeur sans bouteille diminue avec la profondeur.
3. $V(z) = \frac{P_{atm}}{P_{atm} + \rho_{eau} g z} V_M$
4. $V(z) = 2{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ pour $z = 15\,\mathrm{m}$ et $V_M = 7{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$.

Savoir étudier la pression dans un atmosphère isotherme

Exercice 6 : Atmosphère

1.
2. On isole par la pensée une tranche fixe de fluide d'épaisseur infinitésimale dz située entre z et $z + dz$. On prend ensuite un parallélépipède rectangle de surface dS et de hauteur dz. Ce volume contient une masse dm de fluide. Le principe d'inertie implique que la somme de forces qui s'exercent sur cette tranche est égale au vecteur nul. Nous avons donc $\vec{F}(z)+\vec{F}(z+dz)+dm\vec{g} = \vec{0}$. La projection sur de cette équation sur un axe vertical s'écrit $-F(z)+F(z+dz)+dm\,g = 0$ soit $(-p(z) + p(z + dz))\,dS+ dm\,g = 0$ où p est la pression. Nous obtenons donc $\frac{dP}{dz} = -\frac{dmg}{dV}$ où dV est le volume considérée soit $\frac{dP}{dz} = -\rho g$.
3. Nous obtenons donc, en injectant l'expression de ρ en fonction de p :
$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT}p(z) \tag{1}$$
4. L'équation 1 se réécrit $\int_{p_0}^{p(z)} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\int_0^z \frac{Mg}{RT}\mathrm{d}z$ soit :
$$p(z) = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}z} = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$$
où H est la hauteur d'échelle de l'atmosphère.
5. Soit p_0 la pression au niveau de la mer. Nous cherchons z tel que $p(z) = \frac{p_0}{2}$ soit $z = \frac{RT}{Mg}\ln(2) = 6{,}08\,\mathrm{km}$.
6. $n(z) = n_0 e^{z/H}$.
7. La différence entre le sommet du Mont Blanc et le niveau de la mer vaut $p_0 - p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}4800} = 427\,\mathrm{hPa}$.

2 La mise en œuvre : niveau 1

Exercice 7 : Voiture immergée

1. La surpression a pour expression $\Delta P = \rho g h = 84{,}4 \times 10^3\,\mathrm{Pa}$.
2. $F = \Delta P\ S = 1{,}01 \times 10^5\,\mathrm{N}$
3. Non, le conducteur ne peut pas ouvrir la porte, la force nécessaire est celle qu'il faut pour soulever une masse de 10 t.

Exercice 8 : Hublot

1. $F = 2{,}9 \times 10^3\,\mathrm{N}$.

Exercice 9 : Tube en U

1. $h_2 = \frac{\rho_1 h_1}{\rho_2 - \rho_1}$.

Exercice 10 : Manomètre

1. $P_1 = P_0 + \rho g h$.
2. $h \simeq 2\,\text{m}$.

Exercice 11 : Crique hydraulique

1. $F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$.

Exercice 12 : Osmomètre

1. La différence de pression est due aux chocs des particules qui ne peuvent pas passer à travers la membrane semi-perméable.
2. Π est égale au saut de pression de part et d'autre de la paroi. Nous avons donc $\Pi = P_0 + \rho_{solvant} g a - (P_0 + \rho_{solution} g(a-h)) \simeq \rho g h$.
3. Le graphe de $P = f(z)$ présente une discontinuité au moment du passage de la membrane.

Exercice 13 : Crique hydraulique 2

L'égalité des pressions sur une ligne horizontale dans un même fluide a pour expression $P_{atm} + \frac{mg}{S} = P_{atm} + \rho g h$ d'où $h = \frac{m}{S\rho} = 0{,}5\,\text{m}$

Exercice 14 : Pression dans les chambres

L'égalité des pressions sur une ligne horizontale dans un même fluide a pour expression $P_{atm} + \frac{F}{S} = P_D + \rho g 0,25$ d'où $P_D = P_{atm} + \frac{F}{S} - \rho g 0,25 = 98\,936\,\text{Pa}$. De même $P_A = P_{atm} + \frac{F}{S} + \rho g 0,25 = 103\,841\,\text{Pa}$.

Exercice 15 : Piston

A l'équilibre la force totale qui s'exerce sur le piston doit être nulle d'où $(\rho g h)\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = F$.

Exercice 16 : Pression artérielle

120 millimètre de mercure à une pression $P = \rho_{mercure} g h_{mercure}$. La hauteur correspondant avec du sang vaut $h_{sang} = \frac{\rho_{mercure} h_{mercure}}{\rho_{sang}} = 1{,}57\,\text{m}$.

Exercice 17 : Force pressante dans un réservoir

1. $F_{BD} = (P_{atm} + \rho g 6) \times 8,1 \times 2,5 = 2{,}88 \times 10^6\,\text{N}$.
   $F_{AB} = (P_{atm} + \rho g(3,5 + \frac{2{,}5}{2})) \times 2,5 \times 2,5 = 8{,}37 \times 10^5\,\text{N}$.
   $F_{AC} = (P_{atm} + \rho g 3,5) \times 8 \times 2,5 = 2{,}5 \times 10^6\,\text{N}$.
2. $P = F_{BD} - F_{AC}$.

Exercice 18 : Force pressante sur une paroi

$F_1 = F_2$ implique $\frac{H}{h} = \sqrt{\frac{1{,}25}{0{,}8}} = 1,25$.