

CHAPITRE 8

Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Objectifs :

- Résoudre l'équation de Navier-Stokes dans un système de coordonnées cartésien dans des cas simples

8.1 Notion de couche limite

Si on plonge un obstacle dans un écoulement laminaire, il faut raccorder l'écoulement laminaire et la condition de non glissement du fluide sur les parois. Le raccordement se fait sur une zone appelée **couche limite** d'épaisseur δ où le gradient de vitesse dans une direction orthogonale à l'interface est élevée. L'effet de la viscosité du fluide est négligeable en dehors de la couche limite tandis que le fort cisaillement de la vitesse dans la couche limite nous oblige à tenir compte des forces de viscosité dans la couche limite.

Bien que la couche limite occupe un faible volume dans l'écoulement du fluide, **les phénomènes de dissipation sont prépondérants dans la couche limite.**

Notons que des couches limites se développent également à l'interface entre deux fluides.

La figure 8.2 montre le développement d'une couche limite d'épaisseur au voisinage d'une plaque plane. La couche limite a une épaisseur δ à la distance l du bord de la plaque. A la frontière de la couche limite, il y a égalité entre les forces volumiques par unité de volume et le terme d'inertie d'où :

$$\rho \frac{v^2}{l} \sim \eta \frac{v}{\delta^2}$$

d'où :

$$\delta = \left(\frac{\eta l}{\rho v} \right)^{1/2} = \frac{l}{Re^{1/2}}$$

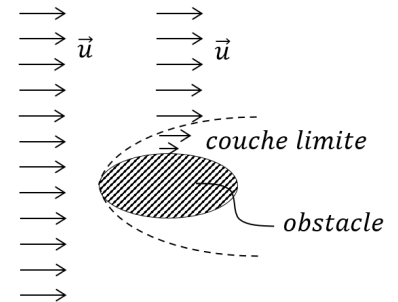


FIGURE 8.1: Développement d'une couche limite près d'un obstacle.

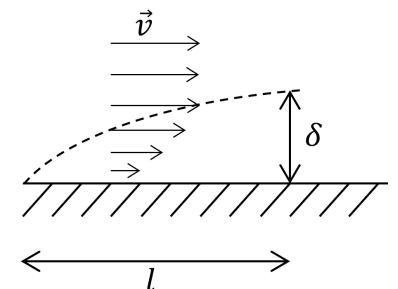


FIGURE 8.2: Développement d'une couche limite près d'un obstacle.

Cette dernière équation montre que le profil de la couche limite est parabolique et que l'épaisseur de la couche limite dépend du nombre de Reynolds. Les couches limites peuvent donc être laminares ou turbulentes selon la valeur du nombre de Reynolds.

8.2 Écoulement parfait et équation d'Euler

Nous allons maintenant étudier l'écoulement en dehors de la couche limite. Dans ce cas, les forces de viscosité sont négligeables devant les autres termes de l'équation de Navier-Stokes. Nous parlons dans ce cas d'un **écoulement parfait**.

Nous obtenons alors **l'équation d'Euler** qui décrit l'écoulement d'un fluide compressible ou incompressible et a pour expression :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P \quad (8.1)$$

Cette équation est valide pour **un champ de vitesse d'un écoulement parfait compressible ou incompressible**.

8.3 Théorème de Bernoulli : conservation de l'énergie mécanique le long d'une ligne de courant

Notre but est d'obtenir l'équivalent du théorème de l'énergie mécanique pour un fluide. Nous allons donc chercher à faire apparaître les différentes contributions de l'énergie mécanique du fluide à partir de l'équation du mouvement d'une particule fluide. Nous avons mentionné dans le chapitre sur la cinématique des fluides que la dérivée particulaire peut s'écrire :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \vec{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$$

ce qui nous permet de réécrire l'équation d'Euler sous la forme :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \vec{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P$$

Nous allons dans la suite nous intéresser au régime permanent d'un écoulement incompressible $\rho = \text{cst}$ et permanent dans un champ de pesanteur uniforme avec $\vec{g} = -g\hat{u}_z$. L'équation d'Euler se réécrit alors :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) + \vec{\nabla}(\rho g z) + \vec{\nabla} P + \rho \vec{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = 0$$

soit :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z \right) = -\rho \vec{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$$

En multipliant scalairement par le vecteur déplacement $d\vec{OM}$ le long d'une ligne de courant, nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z \right) \cdot d\vec{OM} = -\rho (\vec{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{OM}$$

d'où :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z \right) \cdot d\vec{OM} = -\rho (\vec{v} \wedge d\vec{OM}) \cdot \vec{\text{rot}} \vec{v}$$

☞ Le produit mixte $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$ est invariant par permutation circulaire.

Puisque $d\vec{OM}$ est le vecteur déplacement le long de la ligne de courant, nous avons $\vec{v} \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$ par définition d'une ligne de courant. Ainsi, $d\left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + P\right) = 0$ le long d'une ligne de courant d'où :

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + P = Cst \quad \text{le long d'une ligne de courant} \quad (8.2)$$

pour un écoulement **permanent incompressible en dehors de la couche limite et parfait dans un champ de pesanteur uniforme**.

Cette relation est le théorème de Bernoulli. Notons que **la constante est différente pour chaque ligne de courant dans la relation précédente**.

Notons également que le théorème de Bernoulli est **une équation de conservation de l'énergie par unité de volume de fluide**. L'équation de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie cinétique de translation des particules fluides par unité de volume (le terme $\rho \frac{v^2}{2}$), l'énergie potentielle de pesanteur par unité de volume (le terme $\rho g z$) et l'énergie cinétique d'agitation thermique par unité de volume (le terme P). Ainsi, la géométrie de l'écoulement permet de contraindre les particules fluides à se déplacer dans une direction et à transférer de l'énergie cinétique d'agitation thermique en énergie cinétique de translation.

8.4 Écoulement courbe

Nous voulons établir une équation locale qui relie la vitesse de l'écoulement du fluide au gradient de pression dans le cas d'un fluide en écoulement courbe.

Nous notons $\vec{t}$ le vecteur tangent à la ligne de courant et $\vec{n}$ le vecteur normale à la ligne de courant et orienté vers le centre de courbure. En écoulement courbe, le vecteur unitaire change de direction et nous avons $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{Dv}{Dt}\vec{t} + v\frac{D\vec{t}}{Dt} = \frac{Dv}{Dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$. L'équation d'Euler se réécrit donc :

$$\rho \frac{Dv}{Dt}\vec{t} + \rho \frac{v^2}{R}\vec{n} + \vec{\nabla}(\rho g z) + \vec{\nabla}P = 0$$

Nous pouvons projeter l'équation précédente sur l'axe portée par $\vec{n}$ pour obtenir :

$$\rho \frac{v^2}{R} + \vec{\nabla}(\rho g z) \cdot \vec{n} + \vec{\nabla}P \cdot \vec{n} = 0 \quad (8.3)$$

Ainsi, pour un écoulement courbe dont le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{\nabla}(\rho g z)$, nous devons avoir $\rho \frac{v^2}{R}$ qui compense la composante du gradient de pression suivant $\vec{n}$. Cela signifie que $\vec{\nabla}P$ doit être dans le sens inverse de $\vec{n}$. Le gradient de pression est donc dirigé vers l'extérieur. La pression est donc plus faible vers l'intérieur.

Autrement dit, la force centrifuge par unité de volume ($\rho \frac{v^2}{R}$) qui s'exerce sur une particule fluide dans son référentiel est compensée par la force pressante par unité de volume (F_p) lorsque la particule fluide est à distance constante du centre. La pression est donc plus faible vers l'intérieur de l'écoulement ce qui "colle" l'écoulement à la paroi. Le poids de la particule fluide finit ensuite par faire tomber la particule fluide.

Ainsi, en intégrant le long d'un chemin perpendiculaire à la ligne de

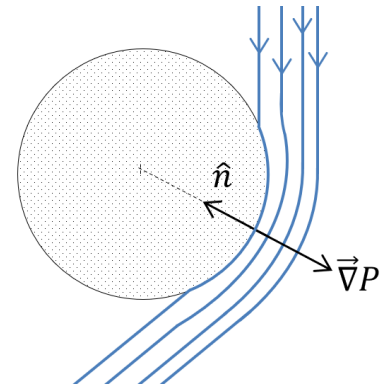


FIGURE 8.3: Écoulement d'un fluide le long d'une surface courbe. La force centrifuge qui s'exerce sur une particule fluide dans son référentiel est compensée par la force pressante lorsque la particule fluide est à distance constante du centre.

champ, nous obtenons :

$$\int \rho \frac{v^2}{R} ds + \rho g \Delta z + \Delta P = cst \quad \text{le long d'un chemin tel que } d\vec{s} \cdot \vec{t} = 0.$$

(8.4)

8.5 Conservation de l'énergie mécanique dans un fluide irrotationnel

Un fluide est qualifié d'irrotationnel si $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$. Physiquement, les particules fluides n'ont pas de mouvement de rotation pure dans un écoulement irrotationnel, l'écoulement est non tourbillonnaire. Autrement dit, les particules fluides peuvent avoir une trajectoire circulaire mais elles ne tournent pas sur-elle même.

Dans ce cas, nous obtenons que :

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + P = Cst \quad \text{dans tout le fluide}$$

(8.5)

Cette équation est valide **en dehors de la couche limite**.

8.6 Pression statique, dynamique et de stagnation

Dans l'équation $\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + P = Cst$:

- le terme P représente **la pression statique**, c'est la pression thermodynamique. Cette pression est liée à l'agitation thermique des particules
- le terme $\rho \frac{v^2}{2}$ représente **la pression dynamique**
- la somme de la pression statique et de la pression dynamique est la **pression de stagnation**. Elle représente la pression au point de stagnation du fluide.

Un tube de Pitot (figure 8.4) permet de mesurer la pression de stagnation. Une sonde de Pitot à laquelle on intègre des trous de mesure de la pression statique permet de mesurer la vitesse de l'écoulement. Ce type de sonde est utilisé dans les avions pour déterminer la vitesse de l'avion par rapport à l'air.

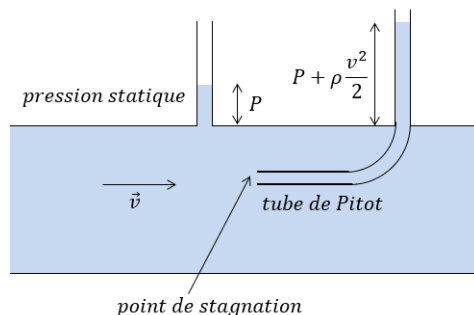


FIGURE 8.4 – Schéma d'un tube de Pitot.

8.7 Charge et perte de charge

La quantité $\frac{p}{\rho g} + h + \frac{v^2}{2g}$ se nomme la charge du fluide. Elle est proportionnelle à l'énergie mécanique totale du fluide. Pour un écoulement visqueux dans une conduite, il y a dégradation d'une partie de l'énergie en chaleur par frottement visqueux ou dissipation turbulente au cours du mouvement. Cette dégradation est prise en compte par un terme supplémentaire appelé pertes de charge et noté ΔH .

Nous obtenons alors le **le théorème de Bernoulli généralisé** :

$$\frac{U_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{U_2^2}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \Delta H \quad (8.6)$$

où U est la valeur moyenne de la vitesse de l'écoulement du fluide dans la conduite.

Les pertes de charges se classent en deux catégories :

- les pertes de charge régulières dues à l'effet de la viscosité du fluide.
- les pertes de charge singulières dues à des modifications de la section de l'écoulement (élargissement ou rétrécissement), des changements de direction (coudes, bifurcations) ou bien la présence de dispositifs hydrauliques (pompes, turbines, vanne, ...).

Il faut prendre en compte ces pertes de charges dans un réseau hydraulique réel pour s'assurer d'avoir la pression voulue à chaque endroit du réseau.

- Pour déterminer l'expression générale des pertes de charges régulières, nous considérons un écoulement dans un tube rectiligne incliné de diamètre D et de longueur L .

Dans le cas où $U_1 = U_2$, nous avons :

$$\Delta H_{12} = z_1 + \frac{P_1}{\rho g} - (z_2 + \frac{P_2}{\rho g}) = \frac{\Delta P}{\rho g}$$

Nous pouvons réécrire l'expression précédente pour faire apparaître un coefficient sans dimension noté Λ en écrivant :

$$\begin{aligned} \Delta H_{12} &= \frac{\Delta P}{\rho g} \frac{2g}{v^2} \frac{D}{L} \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \\ &= \Lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \end{aligned}$$

Avec $\Lambda = \frac{\Delta P}{\rho g} \frac{2g}{U^2} \frac{D}{L} = \frac{\Delta P}{\frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho U^2}$ appelé le coefficient de Darcy-Weisbach ou coefficient de perte de charge régulière.

- les pertes de charge singulières sont exprimées par la relation $h_s = \sum_i K_i \frac{U_i^2}{2g}$ avec $K_i = \frac{\Delta P_i}{\rho U_i^2 / 2}$. Les valeurs de K sont disponibles dans des tables pour les principaux changement de géométrie rencontrées dans un dispositif hydraulique réel. Par exemple, pour un rétrécissement brusque de canalisation, $K = 0,5$ et $K = 0,04$ pour un rétrécissement progressif de canalisation.

8.8 L'effet Venturi

A énergie potentielle constante, le théorème de Bernoulli relie directement la variation de pression à la variation d'énergie cinétique du fluide.

Il y a transfert de l'énergie d'agitation thermique désordonnée en énergie cinétique ordonnée lié à un mouvement dans une direction.

Pour un écoulement incompressible, nous avons $v_1 S_1 = v_2 S_2$ au passage d'un rétrécissement.

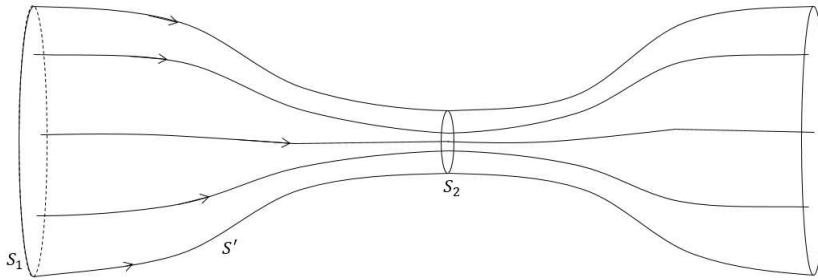


FIGURE 8.5 – La vitesse du fluide augmente au passage de l'étranglement.

L'application du théorème de Bernoulli montre que :

$$\Delta P = \rho \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right)$$

Ce phénomène est utilisé dans les trompes à eau dans les laboratoires de chimie et est responsable du sur-enfoncement des navires. Ce phénomène est également utilisé par les chiens de prairie pour aérer leurs terriers.

La force pressante due à la surpression est également responsable de l'appui aérodynamique des voitures de courses et du vole des avions.