

Équation de Navier-Stokes

Objectifs :

- Citer l'équation de Navier-Stokes et la résoudre dans des cas simples
- déterminer l'expression du nombre de Reynolds

7.1 Équation de Navier-Stokes

Nous allons maintenant établir la très célèbre **équation de Navier-Stokes**. Nous allons suivre la procédure suivante. Nous considérons un parallélépipède rectangle de côté dx , dy et dz que nous suivons des yeux au cours de son mouvement et nous appliquons le principe fondamental de la dynamique à cette particule fluide. Nous avons vu dans le chapitre sur la cinématique que c'est la dérivée particulaire qui apparaît lorsque nous suivons des yeux une particule fluide, l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit donc sous la forme $m \frac{D\vec{v}}{Dt} = \sum \vec{F}_{ext}$. Notons que nous allons établir l'équation de Navier-Stokes dans un système de coordonnées cartésien, nous allons ensuite nous ramener à une égalité vectorielle intrinsèque valide quelque soit le système de coordonnées utilisé.

Dans le cas général, nous devons tenir compte de la compressibilité du fluide qui nécessite d'introduire une viscosité supplémentaire dite de compressibilité. Nous n'allons pas tenir compte de cette force de viscosité supplémentaire pour établir l'équation de Navier-Stokes qui décrira donc uniquement **les écoulements incompressibles**.

La figure 7.1 montre les forces de viscosité et de pression qui s'exercent sur une particule fluide de côté dx et dy .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce carré projeté suivant Ox s'écrit :

$$\begin{aligned} dm \frac{Dv_x}{Dt} &= -F_P(x+dx) + F_P(x) + F_x(y+dy) - F_x(y) + F_x(x+dx) - F_x(x) \\ &= -\frac{\partial F_P}{\partial x} dx + \frac{\partial F_x}{\partial y} dy + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \end{aligned}$$

☞ Il est possible d'établir l'équation de Navier-Stokes sans faire appel à un système de coordonnées particulier, nous devons introduire alors un objet mathématique appelé tenseur. Il existe ainsi plusieurs tenseurs en mécanique des fluides, le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy + \eta S \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy + \eta S \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dx \\
 &= -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy + \eta dx \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy + \eta dy \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dx
 \end{aligned}$$

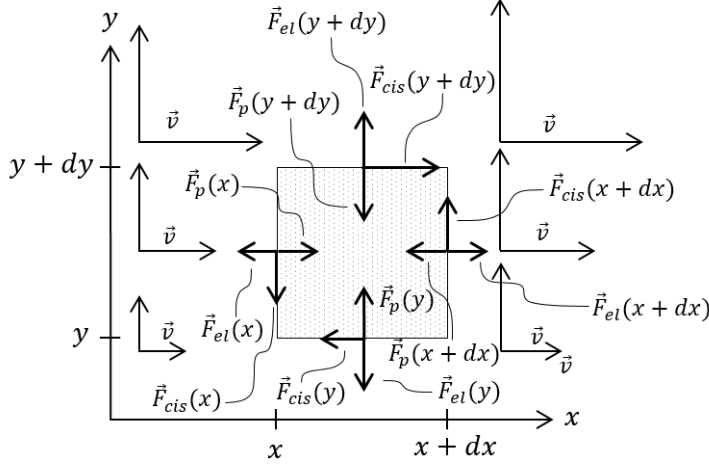


FIGURE 7.1 – Forces de viscosité et de pression qui s'exercent sur une particule fluide de côté dx et dy .

Nous obtenons donc en utilisant le fait que $dm = \rho dx dy$:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$$

De même, on obtient pour la composante Oy de cette équation :

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

En généralisant à trois dimensions et en incluant le poids de la particule fluide par unité de volume, nous obtenons l'équation de Navier-Stokes qui décrit **l'écoulement incompressible d'un fluide Newtonien** :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} \quad (7.1)$$

Dans un écoulement incompressible, les forces de viscosité par unité de volume ont donc pour expression :

$$\vec{f}_{cis} = \eta \Delta \vec{v}$$

L'équation de Navier-Stokes est une équation aux dérivées partielles, il faut donc connaître les conditions aux limites que doit respecter le champ de vecteurs vitesse pour déterminer la solution physique de l'équation de Navier-Stokes.

7.2 Non glissement d'un fluide sur une paroi

Les expériences montrent qu'un fluide visqueux s'accroche à la paroi d'un solide. **La vitesse tangentielle d'un fluide le long d'une paroi immobile est donc nulle.**

Par ailleurs, le fluide ne peut pas pénétrer dans le solide, la vitesse d'un fluide au contact d'un solide doit donc respecter la condition :

$$\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{solide}} \quad (7.2)$$

7.3 Interface fluide-fluide

A l'interface entre deux fluides, il y a égalité entre les contraintes. Ce qui signifie égalité entre les pressions et égalité entre les forces de cisaillement.

Nous pouvons démontrer cette égalité entre les contraintes à l'interface entre fluides en considérant comme système l'interface entre les fluides. A l'échelle de description du fluide, l'épaisseur de l'interface entre deux fluides tend vers zéro et la masse de l'interface tend donc vers zéro. Le principe fondamental de la dynamique implique l'égalité entre les contraintes. Il y a donc **égalité entre les contraintes normales à l'interface ce qui implique égalité entre les pressions**. Il y a également **égalité entre les contraintes de cisaillement ce qui implique égalité entre les forces de cisaillement**.

7.4 Le nombre de Reynolds et les différents régimes d'écoulement

7.4.1 Régime laminaire et turbulent

La figure 7.2 montre l'expérience réalisée par Reynolds en 1883. Dans cette expérience, de l'eau circule dans une conduite horizontale. Un colorant est injecté en continu pour visualiser l'écoulement. Reynolds a observé que tant que le filet de colorant n'est pas perturbé lorsque le débit d'eau dans la conduite est faible (figure 7.2-(a)). Lorsque le débit augmente, l'écoulement adopte un mouvement de plus en plus désordonné (7.2-(b)), ce qui a pour effet de mélanger le colorant à l'eau, si bien qu'il disparaît quand le débit est encore plus fort (figure 7.2-(c)).

Lorsque le débit est très fort, l'écoulement est turbulent, c'est-à-dire que des tourbillons apparaissent dans l'écoulement ce qui est très efficace pour mélanger le fluide.

Reynolds a par ailleurs montré que l'écoulement est similaire si diamètre du tube, la vitesse de l'écoulement et la viscosité du fluide sont modifiées de telle sorte que le nombre $\frac{\rho v L}{\eta}$ ne change pas. Ce nombre est appelé le nombre de Reynolds.

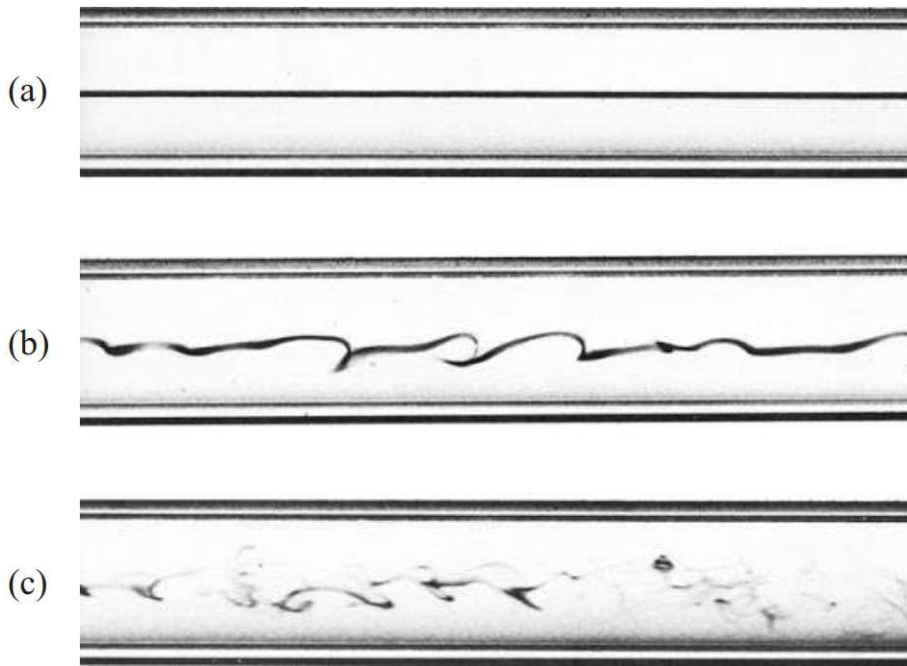


FIGURE 7.2 – Expérience de Reynolds : un liquide coule de la gauche vers la droite dans une conduite cylindrique transparente. Un filet de colorant est injecté à gauche pour permettre de visualiser la structure de l'écoulement. Le débit augmente de (a) vers (c).

Reynolds a ainsi montré que l'écoulement est laminaire lorsque le nombre de Reynolds est petit, agité et désordonné lorsqu'il est suffisamment grand et turbulent lorsqu'il est très grand. Reynolds a montré que la transition entre régimes laminaire et turbulent est atteinte pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 2000 dans cette géométrie.

Exemple

La vidéo

https://www.canal-u.tv/video/science_en_cours/introduction_a_la_turbulence_1981.65 montre quelques exemples de phénomènes turbulents. Une autre vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=eD7LdS6bf0Q> montrant la transition vers la turbulence.

Ainsi pour des petits nombres de Reynolds, les couches de fluide restent parallèles entre elles en se déplaçant. Les forces de viscosité prédominent et empêchent l'écoulement de se désorganiser. On dit que **l'écoulement est laminaire**.

Lorsque le nombre de Reynolds augmente, l'inertie du fluide domine et les inhomogénéités qui apparaissent spontanément dans la vitesse du fluide ne sont plus atténuées, elles deviennent prépondérantes et l'écoulement semble devenir aléatoire. On parle **d'écoulement turbulent**. Ce désordre n'est cependant qu'apparent puisque les statistiques des champs de vitesse, de pression et de température présentent des caractéristiques bien déterminées.

Un écoulement turbulent contient **des tourbillons** de toutes tailles qui se forment aux gradients de vitesse. Les gros tourbillons contiennent l'énergie cinétique du fluide. À trois dimensions, les tourbillons s'étirent et deviennent des petits tourbillons où l'énergie cinétique est dissipée par frottements visqueux. Autrement dit, la turbulence dissipe de l'énergie au niveau des petits tourbillons.

Exemple

Un nageur avance en utilisant la turbulence. Le mouvement des bras crée des tourbillons qui transportent de la quantité de mouvement vers l'arrière.

Les nageurs professionnelles effectuent des coulées en faisant demi-tour sur les bords du bassin. Lors de ces coulées, les nageurs doivent rester à plus de 1.5 m sous l'eau afin d'éviter la turbulence à la surface provoquée par le mouvement des bras des nageurs et d'avancer le plus rapidement possible dans les phases de coulées.

7.4.2 Écoulement dans le sillage d'un cylindre

La figure 7.3 montre l'écoulement au voisinage d'un cylindre.

On remarque sur la figure 7.3 (a) que l'écoulement est quasi-parallèle et laminaire tant que le nombre de Reynolds est inférieur à 10. L'écoulement est alors symétrique entre l'amont et l'aval de la structure. Si le nombre de Reynolds devient supérieur à 10 (figure 7.3 (b)), une paire de tourbillons contrarotatifs, attachés au cylindre, est générée. La symétrie de l'écoulement entre l'amont et l'aval est perdue. Pour un nombre de Reynolds plus élevé, la paire de tourbillon devient instable et ils se détachent alternativement donnant naissance à l'allée de Von Karman (figure 7.3 (c)). On remarque ici que pour que ce détachement tourbillonnaire ait lieu, il suffit de se placer dans la bonne gamme de nombre de Reynolds, extrêmement large, allant de 40 à $2 \cdot 10^5$. Au delà de ce nombre de Reynolds, le sillage devient turbulent (figure 7.3 (d)) et l'écoulement devient extrêmement complexe et désordonnée, composé de tourbillons multi-échelles.

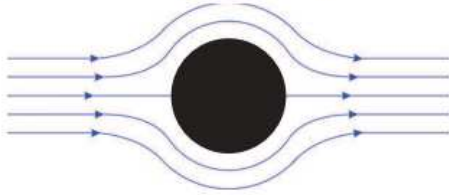
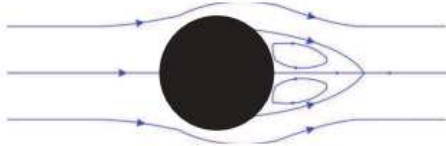
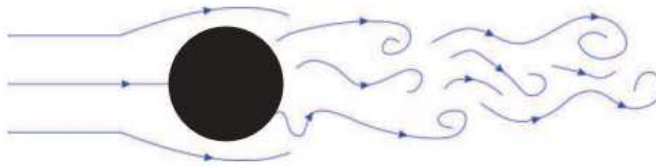
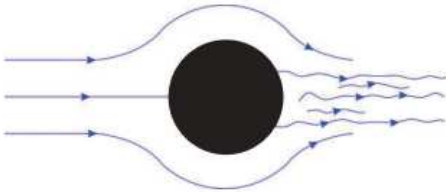
(a) $Re < 10$: écoulement laminaire

 (b) $10 < Re < 40$: tourbillons attachés au cylindre

 (c) $40 < Re < 2 \cdot 10^5$: allée de Von Karman

 (d) $2 \cdot 10^5 < Re$: sillage turbulent


FIGURE 7.3 – Structure de l'écoulement en aval d'un cylindre en fonction du nombre de Reynolds.

7.4.3 Le nombre de Reynolds

Le **nombre de Reynolds** représente le rapport entre l'ordre de grandeur de la variation convective de la vitesse et l'ordre de grandeur de la variation diffusive. La vitesse de propagation d'un phénomène diffusif sur une distance L est de l'ordre de $\frac{\nu}{L}$. Le débit de quantité de mouvement à travers une surface S par diffusion a pour expression $\rho \nu \frac{\nu}{L} dt S$. Le débit de quantité de mouvement à travers une surface S par convection a pour expression $\rho v v dt S$. Le rapport de ces deux quantités est le nombre de Reynolds et a donc pour définition :

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (7.3)$$

L est la dimension caractéristique de l'obstacle ou de la conduite. Le passage du régime laminaire au régime turbulent est caractérisé par le nombre de Reynolds. L'écoulement est turbulent pour un nombre de Re supérieur à 2000. Le tableau suivant donne quelques valeurs de nombre de Reynolds.

description	Re
évolution du manteau terrestre	10^{-20}
glacier	10^{-11}
bille qui tombe dans du miel	10^{-2}
poisson	10^2
nageur	10^5
oiseau	10^6
gros poisson	10^8

TABLE 7.1 – Ordres de grandeurs de nombre de Reynolds.

La valeur du nombre de Reynolds pour un nageur dans de l'eau montre que le nageur éjecte de la quantité de mouvement par convection. Il crée des tourbillons qui transportent de la quantité de mouvement et avance grâce à ce processus.

Dans un écoulement à grand nombre de Reynolds, il y a prédominance des transports de quantité de mouvement par convection tandis qu'il y a prédominance des transports de quantité de mouvement par diffusion dans les écoulements laminaires.

La turbulence est liée au caractère non linéaire des équations de la mécanique des fluides.

7.4.4 Écoulement à très faible nombre de Reynolds

Dans les écoulements à bas nombre de Reynolds ($Re \ll 1$), le temps caractéristique du processus de diffusion est plus rapide que le temps caractéristique des processus convectifs.

La réversibilité est associée aux écoulements à très bas nombre de Reynolds $Re \ll 1$. En effet, les forces d'inertie sont totalement négligeables et l'évolution étant très lente l'équation du mouvement devient $\eta \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} P + \rho \vec{g} = \vec{0}$. Le temps n'intervient plus dans cette équation. **Il y a réversibilité cinématique.**

Exemple

La video https://www.youtube.com/watch?v=p08_KlTKP50 montre un exemple d'écoulement réversible.

Un nageur microscopique dans du miel devrait avancer en éjectant de la quantité de mouvement par diffusion. Ce type d'écoulement étant réversible, un tel nageur ne pourrait pas avancer.