

CHAPITRE 6

Viscosité

Objectifs :

- calculer la force qu'exerce un fluide en écoulement sur une paroi ou sur une couche de fluide

Un bouchon de liège dans l'eau ou l'huile n'a pas le même comportement. Il faut exercer une force plus grande sur le bouchon de liège pour le déplacer dans le miel que dans l'eau. **La facilité avec laquelle on peut déplacer le bouchon dépend d'un paramètre du fluide nommé viscosité dynamique.**

Nous avons dit dans le premier chapitre qu'une caractéristique commune aux fluides est qu'ils finissent toujours par occuper tout le volume disponible. Ce temps est d'autant plus long que la viscosité du fluide est importante.

6.1 Une expérience introductive

La figure montre 6.1 un fluide visqueux dans un cylindre. Une tige est plongée dans le fluide et est mise en rotation, les premières couches de fluide près de la tige sont d'abord entraînées puis le mouvement du fluide se propage de proche en proche vers les couches externes. L'épaisseur de la couche de fluide en rotation augmente proportionnellement à $\sqrt{t}$, ce qui laisse penser à un phénomène de diffusion.

La viscosité d'un fluide est due à la diffusion des particules du fluide d'une couche à l'autre. Cela a pour effet d'homogénéiser la vitesse du fluide.

Avant d'étudier plus en détail la viscosité d'un fluide, nous allons présenter une comparaison avec le solide élastique hookéen.

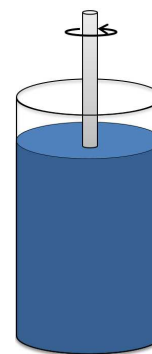


FIGURE 6.1: Tige mise en rotation dans un fluide visqueux.

6.2 Solide élastique Hookéen et fluide visqueux newtonien

6.2.1 Solide élastique Hookéen

Considérons l'expérience représentée dans la figure 6.2, La force exercée pour allonger la barre est proportionnelle à son allongement ΔL et à la section de la barre S . Par contre, la force exercée est inversement proportionnelle à la longueur de la barre. Nous notons donc :

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L_0}$$

où le coefficient E est le module de Young du matériau.

L'équation précédente montre que la grandeur pertinente est la force par unité de surface $\sigma = \frac{F}{S}$ nommée contrainte ainsi que la déformation relative $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$.

Au delà d'une certaine déformation, le matériau est déformé au-delà de son régime élastique comme le montre la figure 6.3. Nous nous limitons au domaine de déformation élastique des solides. Dans ce cas, la déformation est proportionnelle à la contrainte.

Il est également possible de déformer le solide en exerçant une force tangentielle à la surface. Une telle force est appelée une force de cisaillement. La figure 6.4 montre **la déformation d'un solide dans son domaine élastique soumis à une force de cisaillement**.

La force exercée pour obtenir une déformation d'un angle γ dépend de la taille du solide. La grandeur physique pertinente est donc la contrainte appliquée σ qui est reliée à la déformation $\gamma = \frac{u}{d}$ par :

$$\sigma = G\gamma$$

où G est le module élastique de cisaillement. Si la contrainte est supprimée, la déformation s'annule : le corps retrouve sa forme initiale. **La mémoire du solide élastique est donc infinie.**

6.2.2 Le fluide Newtonien

Passons maintenant à **la déformation d'un liquide visqueux Newtonien**. Nous considérons un fluide très visqueux qui s'écoule parallèlement à l'axe Ox sous l'action d'un palet qui glisse à sa surface (figure 6.5). Un tel écoulement où la direction du vecteur vitesse est la même en tout point est appelé écoulement parallèle. Les particules fluides en contact avec la paroi mobile sont entraînées à la vitesse du palet tandis que les particules fluides en contact avec la paroi fixe restent immobiles. Cela génère un cisaillement dans le fluide.

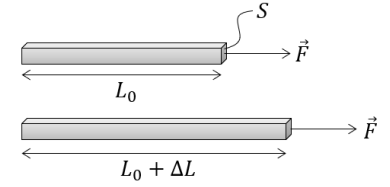


FIGURE 6.2: Déformation longitudinale d'un solide dans le domaine élastique.

Les valeurs de E sont très différentes en fonction du type d'élasticité. L'élasticité d'origine enthalpique est due à l'allongement des liaisons entre les atomes lorsque une force est exercée sur le matériau. l'élasticité d'origine entropique est due aux changements d'orientation des liaisons lors de l'élongation du matériau. L'énergie mise en jeu est beaucoup plus faible que pour augmenter la distance entre les atomes. La valeur de E associée à une élasticité entropique est de plusieurs ordre de grandeurs plus faible que la valeur de E associée à une élasticité enthalpique.

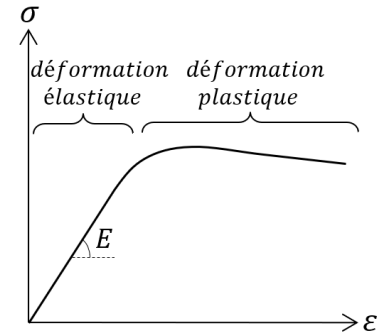


FIGURE 6.3: Contrainte σ en fonction de la déformation ε . La déformation est proportionnelle à la contrainte dans le domaine linéaire.

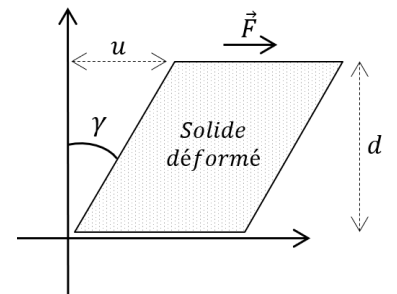


FIGURE 6.4: Déformation d'un solide soumis à une force de cisaillement.

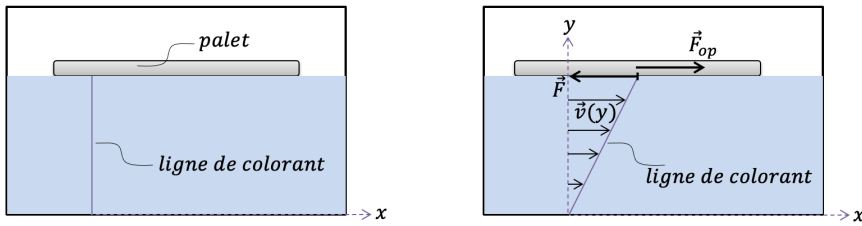


FIGURE 6.5 – Force exercée sur un palet qui glisse sur un fluide visqueux à vitesse constante. Une ligne de colorant est injectée dans le fluide à l'aide d'une seringue pour visualiser l'écoulement. $\vec{F}_{op}$ représente la force exercée par l'opérateur sur le palet. $\vec{F}$ représente la force exercée par le fluide sur le palet. Puisque le fluide se déplace à vitesse constante, le principe d'inertie implique $F_{op} = F$.

On remarque expérimentalement que la force à exercer est proportionnelle à la taille S du palet. La grandeur physique pertinente est donc la contrainte appliquée sur le fluide. **On observe expérimentalement que la contrainte est reliée à la variation temporelle de l'angle.** Cela signifie que le fluide au repos n'exerce pas de force sur le palet. Contrairement au solide, il n'existe pas de force tangentielle dans un fluide au repos. Cela signifie également qu'un fluide Newtonien n'a aucune mémoire de son état précédent.

La contrainte exercée par l'opérateur sur le palet a donc pour expression :

$$\sigma = \eta \dot{\gamma}$$

avec $\dot{\gamma} = \frac{v(d)}{d}$. Puisque l'opérateur déplace le palet à vitesse constante, le principe d'inertie implique que la couche de fluide exerce sur le galet une force de frottement tangentielle, appelée **force de viscosité ou force de cisaillement** qui a pour expression par unité de surface :

$$\sigma = \eta \dot{\gamma} \quad (6.1)$$

Le coefficient η est la viscosité dynamique du fluide et s'exprime en Pas. Le tableau suivant montre quelques valeurs de viscosité dynamique. Les fluides dont la loi de comportement respecte l'équation précédente sont appelés des fluides Newtoniens.

fluide	Viscosité dynamique
air	10^{-6}
eau	10^{-3}
huile	1
graisse	10^3

TABLE 6.1 – Ordres de grandeurs de la viscosité dynamique de quelques fluides.

6.2.3 Origine physique de la viscosité

Revenons sur l'expérience décrite dans la figure 6.5, Le palet exerce sur la première couche de fluide une force $\vec{F}_{op}$ qui la met en mouvement. Nous constatons que les couches de fluide sont mises en mouvement de proche en proche de telle sorte que le profil de vitesse obtenu est comparable au profil de température entre deux plaques de températures différentes. On

observe un transport de la quantité de mouvement d'un point à l'autre. Plus précisément, **il y a transport de la quantité de mouvement des zones de vitesse élevée vers les zones de vitesse faible**.

Voici physiquement à quoi correspond la viscosité dans un gaz.

Les particules d'un milieu à l'état fluide ne sont pas liées les unes aux autres. Elles peuvent donc passer d'une couche de fluide à l'autre sous l'effet de leur agitation thermique. Considérons une couche de fluide plus rapide que ces couches voisines. L'agitation thermique des particules provoque un transfert des particules d'impulsion élevée vers les couches de fluide lente et un transfert des particules lentes dans la couche de fluide rapide. Ainsi, la couche de fluide rapide est ralentie par les couches de fluides lentes voisines tandis que les couches de fluides lentes sont accélérées par la couche de fluide rapide.

Voici une analogie qui permet de comprendre l'origine des forces de viscosité. Imaginons deux trains qui roulent à des vitesses légèrement différentes l'un à côté de l'autre. Supposons que des manutentionnaires jettent des ballots d'un train à l'autre. Les ballots en provenance du train rapide accélèrent le train le plus lent tandis que les ballots en provenance du train lent ralentissent le train rapide. Les trains jouent le rôle de des couches de fluide dans cette analogie.

Il faut donc retenir que ce processus de transfert de quantité de mouvement est à l'origine de la force de viscosité. Une couche rapide exerce une force qui tend à faire accélérer les couches de fluide lentes à son contact. Une couche de fluide lente exerce une force qui tend à faire ralentir les couches de fluides rapides à son contact.

Ce transfert de quantité de mouvement est également à l'origine d'une force exercée sur les parois. La figure 6.6 montre que le transfert de quantité de mouvement est plus important dans le sens de l'écoulement que dans le sens opposé. Le fluide exerce donc une force dirigée dans le sens de l'écoulement sur la paroi. La paroi exerce donc une force sur l'écoulement dans le sens opposé à l'écoulement.

Exemple

Détaillons l'expression du coefficient de viscosité dans le cas d'un gaz parfait à l'équilibre thermodynamique local. Nous utilisons la méthode des 1/6 pour déterminer le nombre de particules qui passe à travers une surface S pendant dt .

Nous considérons deux couches de fluides adjacentes. La distance qui sépare les deux couches de fluide est égale au libre parcours moyen des atomes.

Le nombre de particules qui proviennent de la couche rapide et qui passe à travers S pendant dt a pour expression $\frac{1}{6}nv^*Sdt$ où $v^* = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ est la vitesse quadratique moyenne. Ces particules transportent donc la quantité de mouvement $\frac{1}{6}nv^*Sdtmv_x(x+\lambda)\hat{u}_x$ depuis la couche de fluide rapide.

Le nombre de particules qui proviennent de la couche lente et qui passe à travers S pendant dt a pour expression $\frac{1}{6}nv^*Sdt$. Ces particules transportent donc la quantité de mouvement $\frac{1}{6}nv^*Sdtmv_x(x)\hat{u}_x$ depuis la couche de fluide lente.

La couche lente exerce une force sur la couche rapide qui la fait ralentir. La couche de fluide rapide perd des particules de quantité de mouvement élevée et gagne des particules de quantité de mouvement faible. La différence entre les deux expressions de quantité de mouvement a pour expression $-\frac{1}{6}nv^*Sdtmv_x(x+\lambda)\hat{u}_x +$

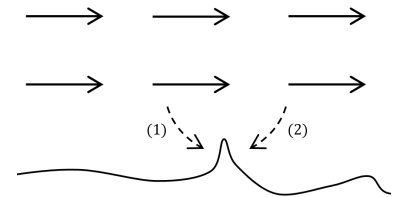


FIGURE 6.6: Transfert de quantité de mouvement à une paroi.

$$\frac{1}{6}nv^*Sdtmv_x(x)\hat{u}_x = -\frac{1}{6}nv^*Sdtm\lambda\frac{\partial v_x}{\partial x}\hat{u}_x.$$

Le libre parcours moyen est donné par $\lambda\sigma n = 1$ où σ est la section efficace de collision. La force exercée par la couche de fluide lente sur la couche de fluide rapide a donc pour expression :

$$\vec{F} = -\frac{\lambda}{6}n\sqrt{3mkT}S\frac{\partial v_x}{\partial x}\hat{u}_x$$

La viscosité dynamique d'un gaz parfait a ainsi pour expression :

$$\eta = \frac{1}{6}\lambda n\sqrt{3mkT}$$

Dans les gaz, une augmentation de la température entraîne un mouvement plus intense des molécules et accroît le mélange moléculaire ce qui augmente la valeur de la viscosité.

L'origine de la viscosité dans un liquide est différente. Dans un liquide, les molécules peuvent se déplacer mais elles restent liées les unes aux autres. Déplacer une couche de liquide va donc entraîner petit à petit la couche de liquide voisine.

L'augmentation de la température dans un liquide entraîne une augmentation de la distance moyenne entre les molécules. La force d'attraction entre les molécules diminue avec la température ce qui entraîne une diminution de la viscosité d'un liquide avec la température.

Le saviez-vous ?

Il existe une grande variété de fluides. Les fluides rhéofluidifiants sont des fluides dont la viscosité dynamique diminue lorsque le taux de cisaillement augmente (le ketchup par exemple). Ainsi, η est une fonction décroissante de $\dot{\gamma}$. Les fluides rhéoépaississants sont des fluides dont la viscosité dynamique augmente lorsque le taux de cisaillement augmente (mélange eau + maïzena par exemple). La vidéo https://www.youtube.com/watch?v=_P9oJ6i6BIQ montre un exemple de fluide rhéofluidifiant. La vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=mYTerCbDUzE> montre un exemple de fluide rhéoépaississant. Un fluide thixotrope est un fluide dont la viscosité dynamique diminue au cours du temps sous l'effet d'une contrainte de cisaillement constante.

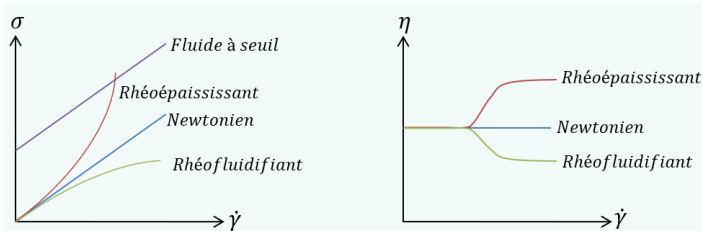


FIGURE 6.7 – Caractéristique des différents types de fluide non Newtonien.

6.3 Expression de la force de cisaillement

En régime permanent, on observe le profil de vitesse montré sur la figure 6.5 à savoir $v(y) = v(d)\frac{y}{d}$. La contrainte exercée par la portion grise de fluide

de la figure 6.8 sur la couche de fluide à son contact a pour expression :

$$\sigma = \eta \frac{v(y)}{y}$$

La quantité $\frac{v(y)}{y}$ est égale au gradient de vitesse dans ce cas particulier. En effet, dans le cas de l'écoulement parallèle étudié, nous avons $v(y) = v(d)\frac{y}{d}$ et $\frac{v(y)}{y} = \frac{v(d)}{d} = \frac{\partial v}{\partial y}$. De manière général, **la force de cisaillement exercée par la couche de fluide de cote inférieure à y sur la couche de fluide supérieure à y dans un écoulement à une dimension est donnée par :**

$$F_x = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (6.2)$$

Pour connaître le sens de cette force, il faut respecter la règle suivante : **une couche de fluide plus rapide que ses voisines est ralentie par les couches de fluide voisines.**

Nous avons vu que la viscosité correspond à un transfert interne de quantité de mouvement qui présente les caractéristiques d'un phénomène de diffusion. Ce transfert est irréversible et tend à uniformiser les vitesses. Ce phénomène provoque également des forces de viscosité dans le sens de "l'élongation".

La figure 6.9 montre un écoulement où les couches de fluide exercent les unes sur les autres une force de viscosité d'élongation. Les couches les plus lentes freinent les couches de fluide les plus rapide sous l'effet du transfert de quantité de mouvement.

La force de viscosité d'élongation exercée de x vers la couche en $x + dx$ est une force dont l'intensité est de la forme :

$$F_x = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (6.3)$$

6.4 Viscosité et diffusion de la quantité de mouvement

Considérons à nouveau l'écoulement parallèle décrit par le champ de vitesse $\vec{v} = v(z)\hat{u}_x$. Un élément de volume du fluide d'épaisseur dy et de surface S est soumis aux forces de cisaillement $\vec{F}(y+dy) = \eta S \frac{\partial v}{\partial y}(y+dy)\hat{u}_x$ et $\vec{F}(y) = -\eta S \frac{\partial v}{\partial y}(y)\hat{u}_x$. En l'absence d'autres forces dans la direction Ox , le principe fondamental de la dynamique a pour expression :

$$\begin{aligned} \rho S dy \frac{\partial v}{\partial t} &= F(y+dy) - F(y) \\ &= \frac{\partial F}{\partial y} dy \\ &= \eta S \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (6.4)$$

Cette équation représente l'équation de diffusion de la vitesse due au transfert de particules d'une couche de fluide à l'autre. Ainsi, la viscosité tend

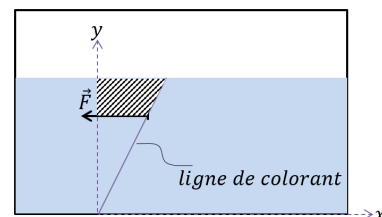


FIGURE 6.8: Force exercée par la couche de fluide sous la partie hachurée sur la couche de fluide dans la partie hachurée.

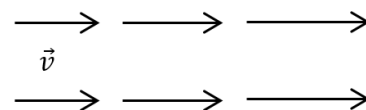


FIGURE 6.9: Gradient de vitesse à l'origine d'une force de viscosité d'élongation.

à homogénéiser la vitesse. Le coefficient $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ est appelé la **viscosité cinématique et représente le coefficient de diffusion de la vitesse en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$** . Pour l'eau à 20 °C, la viscosité cinématique est de $1.007 \times 10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ soit $1.007 \text{mm}^2 \text{s}^{-1}$.

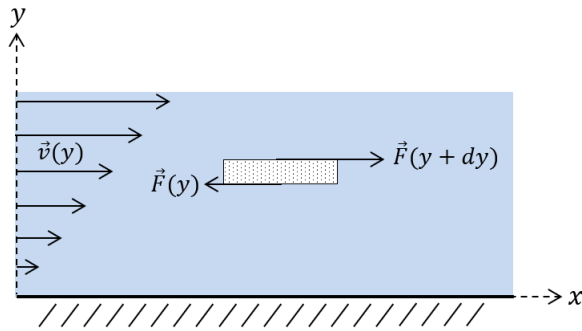


FIGURE 6.10 – Forces de cisaillement qui s'exercent sur un élément de fluide de surface S .