

Débit et conservation de la masse

Objectifs :

- calculer les débits massique et volumique ainsi que le débit d'énergie cinétique transportée par un fluide
- utiliser la condition d'incompressibilité d'un fluide
- écrire l'équation de conservation de la masse

Un fluide transporte du volume, de la masse, de l'énergie L'évolution de ces quantités doivent respecter les principes de conservation de la physique. Nous allons détailler dans ce chapitre comment faire un bilan en mécanique des fluides. Nous allons avoir besoin de la définition du débit pour établir un bilan.

5.1 Débits massique, volumique et d'énergie cinétique

Le **débit volumique** D_V d'un fluide à travers une surface S représente le **volume de fluide qui passe à travers cette surface par unité de temps**. Cette notion est particulièrement utile dans le cas d'un fluide incompressible.

Le **débit massique** D_m d'un fluide à travers une surface S est la **masse de fluide qui passe par unité de temps à travers cette surface**.

La figure 5.1 montre l'écoulement d'un fluide à travers une surface plane S dans le cas particulier où le vecteur vitesse est perpendiculaire à la surface. La masse qui passe pendant dt à travers la surface S est contenue dans le volume de longueur vdt . La masse qui passe à travers la surface S pendant dt a donc pour expression $dm = \rho v S dt$.

Dans le cas général, il faut repérer l'orientation de la surface pour tenir compte de l'angle que fait le vecteur vitesse avec la surface. Nous introduisons le vecteur $\vec{S}$ normal à la surface. La figure 5.2 montre que la masse qui passe à travers la surface S pendant dt vaut $dm = \rho v S \cos \theta = \rho \vec{v} \cdot \vec{S} dt$.

Le débit massique à travers la surface plane $\vec{S}$ a donc pour expression $D_m = \frac{dm}{dt} = \rho \vec{v} \cdot \vec{S}$. Le débit massique à travers une surface quelconque

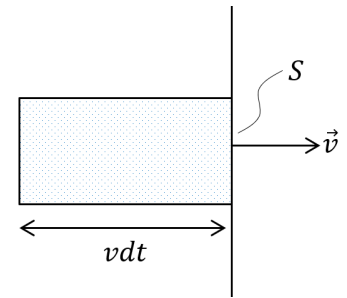


FIGURE 5.1: La masse qui passe pendant dt à travers la surface S est contenue dans le cylindre de volume $Svdt$.

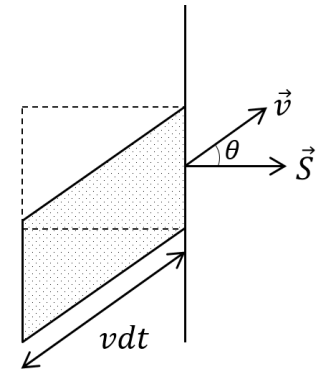


FIGURE 5.2: La masse qui passe en dt à travers la surface S est contenue dans le cylindre de volume $Sv \cos \theta dt$.

est obtenue en décomposant la surface quelconque en une somme de surface plane dont la surface tend vers zéro. Le débit massique à travers une surface quelconque a donc pour expression :

$$D_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (5.1)$$

Le même raisonnement montre que le débit volumique a pour expression :

$$D_V = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (5.2)$$

Nous pouvons suivre le même raisonnement pour établir l'expression du débit d'énergie cinétique transportée par un fluide à travers une surface S . L'énergie cinétique qui passe à travers $\vec{S}$ pendant dt a pour expression $dE_c = \frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} \cdot \vec{S} dt$. Le débit d'énergie cinétique a donc pour expression :

$$D_{E_c} = \iint_S \frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (5.3)$$

Le point important est la dépendance en v^3 du débit d'énergie cinétique.

Exemple

Nous pouvons estimer l'ordre de grandeur de la puissance que peut produire une éolienne. Nous considérons une éolienne avec un rendement de 50 %, cela signifie que l'éolienne convertit 50 % de l'énergie cinétique du vent en énergie électrique. Le débit d'énergie cinétique du vent qui passe à travers une surface S a pour expression $\frac{1}{2} \rho v^2 D_V = \frac{1}{2} \rho v^3 S$. L'ordre de grandeur de la puissance électrique fournie par une éolienne a donc pour expression $\frac{1}{4} \rho v^3 S$. Pour un vent de 50 km h^{-1} et une éolienne de 50 m de diamètre, on trouve $P \simeq 1.6 \times 10^6 \text{ W}$.

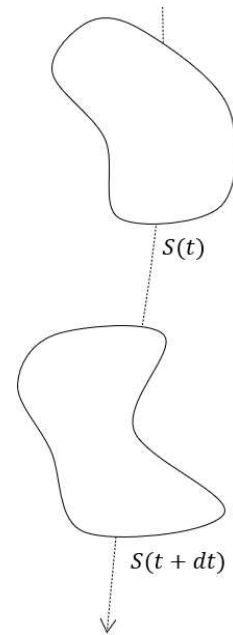


FIGURE 5.3: Exemple de système fermé.

5.2 Les deux modes de bilan

Il existe en mécanique des fluides deux façons différentes de faire un bilan.

Nous pouvons faire un bilan sur un **système fermé**. Dans ce cas, nous suivons des yeux une même portion du fluide dont l'enveloppe - appelée surface de contrôle - peut se déformer au cours du temps. Notons que le bilan fait sur un système fermé est le type de bilan utilisé en thermodynamique étant donné que le premier principe est valide pour un système fermé.

Nous pouvons également considérer un volume fictif fixe par rapport à l'observateur et faire un bilan en tenant compte des entrées et sorties dans ce volume. Dans ce cas, la surface de contrôle est un **système ouvert**.

Nous allons nous familiariser avec la méthode des bilans en mécanique des fluides en étudiant un premier bilan : le bilan de masse.

5.3 Utilisation d'un système ouvert

Nous allons établir l'**équation de conservation de la masse** en utilisant un **système ouvert**. C'est-à-dire que nous considérons un système

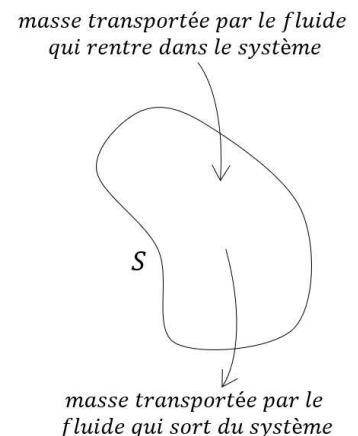


FIGURE 5.4: Exemple de système ouvert.

fixe dans lequel du fluide rentre et sort en transportant de la masse.

5.3.1 Équation globale de conservation de la masse

Nous nommons S la surface fermée qui délimite le système choisi. Si le système ne comporte pas de sources ou de puits, la conservation de la masse de fluide est de la forme :

$$\begin{aligned} &\text{variation temporelle de la masse contenue dans le système} \\ &= \text{débit de masse à travers la surface} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Pour calculer le débit à travers une surface fermée, nous allons devoir orienter la surface. Par convention, nous choisissons d'orienter notre surface vers l'extérieur (figure 5.5).

Cette convention a une conséquence sur les signes à utiliser dans l'équation de conservation de la masse. En effet, avec cette convention de signe, le débit massique à travers la surface par laquelle le fluide rentre est négatif tandis qu'il est positif à travers la surface par laquelle le fluide sort. Ainsi, si la masse de fluide m contenue dans le volume considéré diminue au cours du temps alors $\frac{\partial m}{\partial t}$ est négatif tandis que le débit massique à travers la surface est positif. L'équation de conservation de la masse a donc pour expression :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_{ext}$$

où la présence du signe - provient donc de la convention sur l'orientation de la surface.

Dans le cas d'un **écoulement permanent**, la masse de fluide contenu dans le système ne dépend plus du temps, nous obtenons ainsi :

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0 \quad (5.5)$$

Autrement dit, les débits massiques entrants doivent être égaux aux débits massiques sortants soit :

$$\sum D_{m,entrant} = \sum D_{m,sortant} \quad (5.6)$$

Pour un écoulement incompressible, nous avons $\rho(\vec{r}, t) = cst$. **L'équation globale de conservation de la masse pour un écoulement incompressible** s'écrit donc :

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}_{ext} = 0 \quad (5.7)$$

Exemple

Un tube de courant est un tube qui s'appuie sur les lignes de courant et contient toujours le même nombre de lignes de courant. Appliquons l'équation globale de conservation de la masse en régime permanent au tube de courant de la figure 5.6.

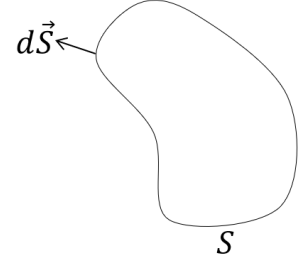


FIGURE 5.5: Par convention, nous orientons la surface vers l'extérieur.

☞ Un fluide n'est jamais totalement incompressible, il y a donc un critère à trouver et qui doit être respecté pour pouvoir considérer qu'un fluide est incompressible. Il est possible de montrer qu'il faut comparer la vitesse v du fluide à la vitesse c du son dans le fluide. Plus précisément, le critère à respecter pour considérer l'écoulement incompressible est $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$. Le caractère incompressible est donc une propriété de l'écoulement et nous parlerons donc d'écoulement incompressible.

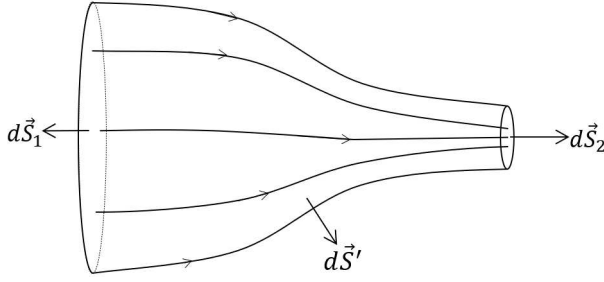


FIGURE 5.6 – Exemple de tube de courant.

Nous obtenons $\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_1 + \iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}' + \iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_2 = 0$. Le débit massique est nul à travers la surface S' car $\vec{v} \cdot d\vec{S}'$ par définition d'un tube de courant. L'équation globale de conservation de la masse en régime permanent appliquée au tube de courant de la figure 5.6 s'écrit donc :

$$\iint_{S_1} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_2 = 0$$

Or, si nous orientons positivement un axe Ox vers la droite, $d\vec{S}_2 = dS_2 \hat{u}_x$ et $d\vec{S}_1 = -dS_1 \hat{u}_x$ d'où :

$$- \iint_{S_1} \rho v \, dS_1 + \iint_{S_2} \rho v \, dS_2 = 0$$

qui nous donne :

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$

où ρ_1 est la masse volumique du fluide au niveau de la surface 1 et v_1 la vitesse moyenne du fluide au niveau de la surface 1. Dans le cas d'un écoulement incompressible, nous avons $\rho_1 = \rho_2$ soit :

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

L'exemple précédent montre que **le débit massique est le même à travers toute section d'un tube de courant dans un écoulement stationnaire.**

Dans un écoulement **incompressible, c'est le débit volumique qui est conservé à travers toute section d'un tube de courant.**

5.3.2 Équation locale

Pour l'établir, nous allons utiliser le théorème d'Ostrogradski qui s'écrit $\oint \vec{A} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iiint \text{div } \vec{A} \, dV$.

Nous considérons ici un système ouvert, c'est-à-dire que le système d'étude est fixe. La masse contenue dans le système est donc une fonction du temps $m(t)$. L'équation de conservation de la masse appliquée à un système ouvert a pour expression :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_{ext}$$

soit :

$$\frac{\partial \iiint \rho \, dV}{\partial t} = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_{ext}$$

Puisque la surface de contrôle est fixe, nous pouvons commuter l'intégration et la dérivation pour obtenir :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_{ext}$$

Nous appliquons le théorème d'Ostrogradski pour obtenir :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_V \text{div}(\rho \vec{v}) dV$$

Le volume V étant choisi arbitrairement, la relation précédente doit être vérifiée quelque soit V ce qui implique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (5.8)$$

L'équation précédente est l'équation locale de conservation de la masse. Dans le cas d'un écoulement permanent, cette équation se réécrit :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (5.9)$$

Dans le cas d'un écoulement permanent et incompressible, la masse volumique est égale à une constante, nous avons donc :

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (5.10)$$

Nous pouvons également établir l'équation locale de conservation de la masse en suivant le raisonnement suivant. Nous considérons un volume de surface S et d'épaisseur dx dans un système de coordonnées cartésiennes. La figure 5.7 montre le principe du calcul. La partie hachurée en noir représente le fluide compris entre x et $x + dx$ tandis que les parties hachurées en vert et rouge représentent le fluide qui rentre et sort du volume compris entre x et $x + dx$.

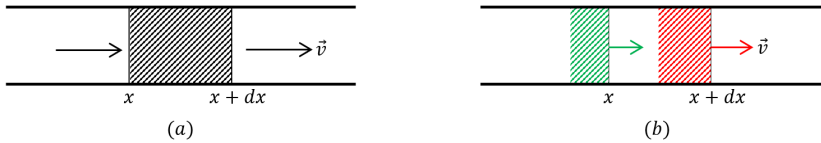


FIGURE 5.7 – Conservation de la masse dans un système ouvert.

La conservation de la masse s'écrit :

Variation temporelle de la masse dans le volume =

Masse de fluide qui rentre dans le volume – Masse de fluide qui sort du volume
soit :

$$S dx (\rho(t + dt, x) - \rho(t, x)) = S \rho(t, x) v_x(t, x) dt - S \rho(t, x + dx) v_x(t, x + dx) dt$$

L'équation précédente se réécrit :

$$\frac{(\rho(t + dt, x) - \rho(t, x))}{dt} = - \frac{\rho(t, x + dx) v_x(t, x + dx) - \rho(t, x) v_x(t, x)}{dx}$$

Nous reconnaissons les définitions des dérivées partielles. Nous obtenons ainsi l'équation de conservation de la masse à une dimension :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = 0$$

Nous généralisons immédiatement à trois dimensions pour obtenir :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

5.3.3 Utilisation de la dérivée particulaire

Nous pouvons introduire la dérivée particulaire pour passer d'un système ouvert à un système fermé. La relation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0$ se réécrit $\frac{D\rho}{Dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho + \rho \text{div} \vec{v} = 0$.

Nous injectons l'expression de la dérivée particulaire pour obtenir :

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0} \quad (5.11)$$

Cette équation représente la conservation de la masse en suivant une particule fluide des yeux. Dans le cas où le fluide est incompressible, la masse volumique d'une particule fluide ne peut pas varier au cours du temps. Ainsi, nous retrouvons que la relation $\text{div} \vec{v} = 0$ est vérifiée dans un fluide incompressible.

Retenons donc le résultat suivant, pour un fluide incompressible :

$$\boxed{\text{div} \vec{v} = 0} \quad (5.12)$$

5.4 Système fermé

Nous considérons maintenant un **système fermé**. La conservation de la masse de fluide contenue dans le système implique que $\int_{V(t+dt)} \rho(t+dt, \vec{r} + d\vec{r})dV - \int_{V(t)} \rho(t, \vec{r})dV = 0$. Nous pouvons récrire cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned} \iiint_{V(t+dt)} \rho(t+dt, \vec{r} + d\vec{r})dV - \iiint_{V(t)} \rho(t, \vec{r})dV &= \iiint_{V(t+dt)} \rho(t+dt, \vec{r} + d\vec{r})dV - \iiint_{V(t+dt)} \rho(t, \vec{r} + d\vec{r})dV \\ &+ \iiint_{V(t+dt)} \rho(t, \vec{r} + d\vec{r})dV - \iiint_{V(t)} \rho(t, \vec{r})dV \end{aligned}$$

Les deux premières termes de la partie de droite de l'équation précédente correspondent à la variation de masse volumique en un point fixe. Les deux derniers termes du membre de droite de l'équation précédente représente la différence de masse contenue dans le système entre deux positions différentes. La figure suivante montre que cette différence est donnée par $\iint \rho \vec{v} dt \cdot d\vec{S}_{ext}$. En effet :

$$\oiint \rho \vec{v} dt \cdot d\vec{S}_{ext} = \text{masse de la partie hachurée en rouge}$$

—masse de la partie hachurée en vert

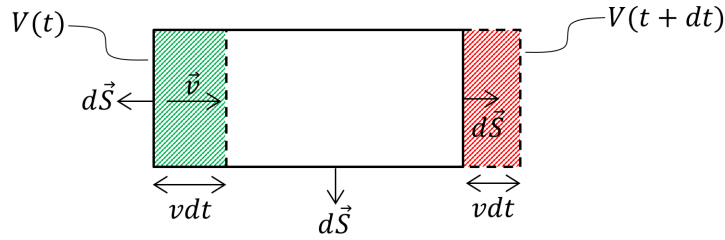


FIGURE 5.8 – La variation de la masse contenue dans le système fermé entre t et $t + dt$ est donnée par la masse contenue dans la partie hachurée en rouge moins la masse dans la partie hachurée en vert.

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \iiint_{V(t+dt)} \rho(t+dt, \vec{r} + d\vec{r}) dV - \iiint_{V(t)} \rho(t, \vec{r}) dV &= \left(\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right) dt + \oiint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_{ext} dt \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) \right) dV dt \end{aligned}$$

Le membre de droite de cette équation doit être nulle quelque soit V , nous avons donc nécessairement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0 \quad (5.13)$$

C'est l'équation locale de conservation de la masse obtenue en utilisant un système fermé.