

## CHAPITRE 4

### Cinématique des fluides en mouvement : partie 2

#### Objectifs :

- connaître la signification physique de la divergence et du rotationnel du champ de vecteurs vitesse
- exprimer mathématiquement la condition d'incompressibilité d'un écoulement

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à une autre différence fondamentale avec la mécanique du point : une particule fluide peut se déformer au cours de son mouvement.

Nous allons donc étudier dans ce chapitre la déformation d'une particule fluide plongée dans un champ de vitesse donné. Pour simplifier les calculs, nous allons considérer uniquement des particules fluides à deux dimensions. Nous allons malgré tout noter  $V$  le "volume" de la particule fluide à deux dimensions.

#### 4.1 Dilatation d'une particule fluide

Considérons une particule fluide carré de côté  $L$  (figure 4.1) plongée dans le champ de vitesse d'expression  $\vec{v} = a_1 x \hat{u}_x + b_1 y \hat{u}_y$ .

Les points  $A, B, C$  et  $D$  du carré ont pour coordonnées à  $t$  :

$$\begin{cases} A(0, 0) \\ B(0, L) \\ C(L, L) \\ D(L, 0) \end{cases}$$

Étant donné l'expression du champ de vitesse, nous voyons que le point  $B$  se déplace suivant  $\hat{u}_y$ , le point  $D$  suivant  $\hat{u}_x$  et le point  $C$  se déplace en diagonale. Au bout de  $t + dt$ , les points  $A, B, C$  et  $D$  du carré ont pour

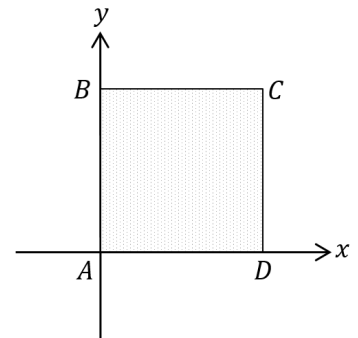


FIGURE 4.1: Particule fluide carré à deux dimensions.

coordonnées :

$$\begin{cases} A(0, 0) \\ B(0, L + b_1 L dt) \\ C(L + a_1 L dt, L + b_1 L dt) \\ D(L + a_1 L dt, 0) \end{cases}$$

Ainsi, la particule fluide plongée dans le champ de vitesse considéré se dilate. Nous allons montrer que cette dilatation est liée à la divergence du champ de vitesse.

Pour ce faire, nous allons calculer  $\frac{1}{V(t)} \frac{dV}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{V(t)} \frac{V(t+\delta t) - V(t)}{\delta t}$  afin de relier la variation de volume au champ de vitesse :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{V(t)} \frac{V(t+\delta t) - V(t)}{\delta t} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{L^2} \frac{(L + a_1 L \delta t)(L + b_1 L \delta t) - L^2}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} (a_1 + b_1 + a_1 b_1 \delta t) \\ &= a_1 + b_1 \end{aligned}$$

Or, la divergence du champ de vecteurs vitesse a pour expression  $\text{div } \vec{v} = a_1 + b_1$ . Nous obtenons donc :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{V(t)} \frac{dV}{dt} \quad (4.1)$$

Il est possible de montrer que cette relation reste valide dans le cas général.

Un écoulement est donc incompressible si le champ de vitesse respecte :

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (4.2)$$

Notons qu'il s'agit **d'une propriété de l'écoulement et non pas du fluide.**

#### Pour aller plus loin

Voici une démonstration plus générale de la relation  $\text{div } \vec{v} = \frac{1}{V(t)} \frac{dV}{dt}$ . Considérons un cube de cotés  $\delta x$ ,  $\delta y$  et  $\delta z$ . La variation de volume de ce cube pendant  $dt$  a pour expression  $dV = (v_x(x + \delta x)dt - v_x(x)dt)(v_y(y + \delta y)dt - v_y(y)dt)(v_z(z + \delta z)dt - v_z(z)dt)$ . Un développement de Taylor à l'ordre 1 montre que  $dV = \delta x \delta y \delta z \text{div } \vec{v} dt$  d'où  $\text{div } \vec{v} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$ .

## 4.2 Rotation propre d'une particule fluide

Considérons maintenant que notre particule fluide de la figure 4.1 plongée dans le champ de vitesse d'expression  $\vec{v} = -a_2 y \hat{u}_x + a_2 x \hat{u}_y$ .

Les points  $A, B, C$  et  $D$  du carré ont pour coordonnées à  $t$  :

$$\begin{cases} A(0, 0) \\ B(0, L) \\ C(L, L) \\ D(L, 0) \end{cases}$$

Étant donné l'expression du champ de vitesse, nous voyons que le point  $B$  se déplace suivant  $\hat{u}_y$ , le point  $D$  suivant  $-\hat{u}_x$  et le point  $C$  tourne vers

la gauche. Au bout de  $t + dt$ , les points  $A, B, C$  et  $D$  du carré ont pour coordonnées :

$$\begin{cases} A(0, 0) \\ B(-a_2 L dt, L) \\ C(L - a_2 L dt, L + a_2 L dt) \\ D(L, a_2 L dt) \end{cases}$$

Ainsi, la particule fluide plongée dans le champ de vitesse considéré tourne autour de l'axe  $Oz$ . Le volume de la particule fluide est donc invariant ce qui est en accord avec le fait que la divergence de ce champ de vitesse soit nulle. Par contre, nous avons  $\vec{\text{rot}} \vec{v} = 2a_2 \vec{u}_z$ . Or  $a_2 L dt$  est la distance parcourue par les points  $B$  et  $D$  pendant  $dt$ , la vitesse angulaire de la particule fluide vaut donc  $a_2$ . Nous introduisons donc le vecteur vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ , appelé **vecteur tourbillon** dont l'expression vaut :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\text{rot}} \vec{v} \quad (4.3)$$

Le vecteur  $\Omega = \vec{\text{rot}} \vec{v}$  est la vorticité.

☞ L'orientation du vecteur vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  est donnée par la convention de la main droite.

### 4.3 Écoulement irrotationnel

Un écoulement est considéré irrotationnel si le champ de vitesse respecte en tout point du volume considéré :

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0} \quad (4.4)$$

Le théorème de Stokes montre alors que  $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$  le long d'un contour quelconque. Notons qu'un écoulement a en général un rotationnel non nul en certains points de l'espace où les gradients de vitesse sont élevés et où les tourbillons vont apparaître. C'est par exemple le cas au bout des ailes d'un avion où se développe un tourbillon dit tourbillon marginal.

L'équation  $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$  implique que le champ de vitesses d'un écoulement irrotationnel dérive d'une fonction scalaire  $\varphi$  appelée potentielle des vitesses puisque  $\vec{\text{rot}}(\vec{\nabla}\varphi) = \vec{0}$  quelle que soit la fonction  $\varphi$ . Nous posons donc  $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ .

Dans le cas de l'écoulement irrotationnel d'un fluide incompressible nous avons donc  $\text{div}(\vec{\nabla}\varphi) = 0$  soit :

$$\Delta\varphi = 0 \quad (4.5)$$

Le potentiel des vitesses est solution d'une équation de Laplace.