

CHAPITRE 3

Cinématique des fluides en mouvement : partie 1

Objectifs :

- calculer l'accélération d'une particule fluide
- déterminer les lignes de courants et les trajectoires des particules fluides

Nous allons commencer dans ce chapitre l'étude des fluides en mouvement. Nous allons notamment apprendre dans ce chapitre à calculer l'accélération d'une particule fluide. Nous verrons également les notions d'écoulement incompressible et irrotationnel.

3.1 Description Lagrangienne et Eulérienne. Dérivée particulaire

3.1.1 Description Lagrangienne et Eulérienne

Plusieurs distinctions avec la mécanique du point méritent d'être soulignées avant de commencer une étude plus détaillée de la cinématique des fluides.

Considérons une balle en train de tomber, nous repérons la position de la balle par un vecteur position $\vec{OM}(t)$ et la vitesse de la balle est donnée par la fonction vectorielle $\vec{v}(t)$. La vitesse de la balle dépend uniquement de la variable t puisque la position de la balle est également fonction de t . Nous pouvons cependant théoriquement faire un changement de variable et exprimer le vecteur vitesse en fonction de la position de la balle. Nous notons le vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{OM})$ dans ce cas.

La situation est différente pour un fluide. Considérons par exemple l'écoulement d'une rivière et supposons que nous regardions un point fixe de la rivière. Il existe en permanence une nouvelle particule fluide qui vient remplacer la précédente et éventuellement avec une vitesse différente. Ainsi, la vitesse du fluide dépend à la fois du point considéré et du temps. Nous notons dans ce cas $\vec{v}(\vec{OM}, t)$ **la vitesse d'une particule fluide au point**

M et à l'instant t . Autrement dit, il existe en chaque point de l'espace un vecteur vitesse, c'est-à-dire que le fluide est décrit par **un champ de vitesse** dans cette approche.

Nous pouvons également, en tant qu'observateur, **suivre une particule fluide des yeux** et mesurer les paramètres du fluide de cette façon. C'est l'approche lagrangienne.

Nous allons montrer qu'il y a deux contributions à l'accélération d'une particule fluide que nous suivons des yeux, une contribution qui provient de la variation temporelle de la vitesse et une contribution qui provient de la variation spatiale du champ de vitesse.

3.1.2 Dérivée particulaire

Nous allons étudier la variation du vecteur vitesse entre deux points séparés spatialement de $d\vec{OM}$ et temporellement de dt pour relier ces deux approches. Nous allons pouvoir ensuite interpréter le résultat obtenu et distinguer deux causes de variation de la vitesse d'un fluide au cours du temps. Nous allons donc calculer $d\vec{v} = \vec{v}(\vec{OM} + d\vec{OM}, t + dt) - \vec{v}(\vec{OM}, t)$. Cette situation correspond à la prise d'une photo d'un écoulement à t et d'une photo à $t + dt$ (figure 3.1). Le vecteur $\vec{v}(\vec{OM} + d\vec{OM}, t + dt)$ correspond au vecteur vitesse du fluide au point $\vec{OM} + d\vec{OM}$ sur la photo prise à l'instant $t + dt$, le vecteur $\vec{v}(\vec{OM}, t)$ correspond au vecteur vitesse du fluide au point $\vec{OM}$ sur la photo prise à l'instant t . Il est important de bien réaliser qu'il n'y a pas de lien physique entre ces deux vecteurs pour l'instant.

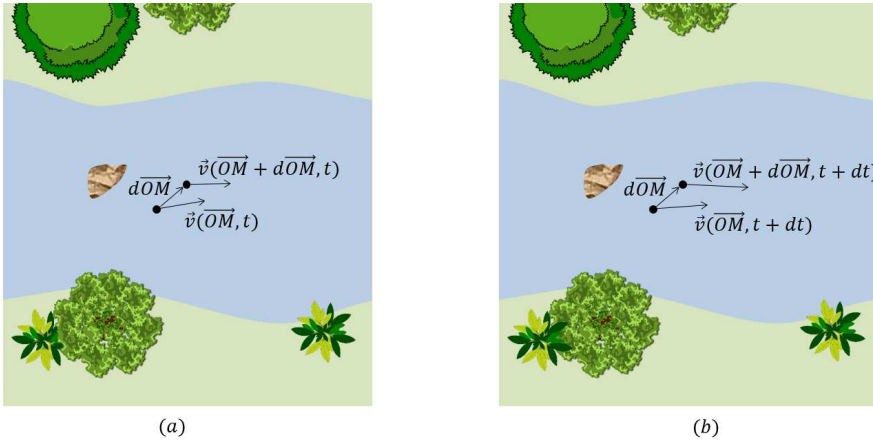


FIGURE 3.1 – Deux vecteurs vitesses du fluide (ici, l'eau d'une rivière) séparés d'une distance infinitésimale à t (figure de gauche) et à $t + dt$ (figure de droite).

Nous allons utiliser un système de coordonnées cartésien pour faire ce calcul, les variables dont dépend le champ de vecteur vitesse sont alors $\vec{v}(x, y, z, t)$. Nous établirons ensuite **une relation intrinsèque en revenant à une égalité entre vecteurs**.

Commençons par calculer la différentielle de la composante v_x du vecteur vitesse. Nous obtenons :

$$dv_x = v_x(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - v_x(x, y, z, t)$$

Nous faisons apparaître les différentes dérivées partielles en écrivant :

$$dv_x = v_x(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - v_x(x, y + dy, z + dz, t + dt) \\ + v_x(x, y + dy, z + dz, t + dt) - v_x(x, y, z, t)$$

☞ Cette façon de décrire le fluide est appelée approche Eulérienne. L'approche Eulérienne est l'approche utilisée en électromagnétisme et en théorie des champs de manière générale.

☞ Un ballon sonde qui se déplacerait avec le fluide effectuerait alors des mesures Lagrangiennes.

☞ Par définition, la dérivée partielle d'une fonction par rapport à une variable est la dérivée de la fonction par rapport à cette variable en fixant toutes les autres variables. Autrement dit, $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{v_x(x + dx, y, z, t) - v_x(x, y, z, t)}{dx}$.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + v_x(x, y + dy, z + dz, t + dt) - v_x(x, y, z, t) \\
 &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + v_x(x, y + dy, z + dz, t + dt) - v_x(x, y, z + dz, t + dt) \\
 &\quad + v_x(x, y, z + dz, t + dt) - v_x(x, y, z, t) \\
 &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + v_x(x, y, z + dz, t + dt) - v_x(x, y, z, t) \\
 &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + v_x(x, y, z + dz, t + dt) - v_x(x, y, z, t + dt) \\
 &\quad + v_x(x, y, z, t + dt) - v_x(x, y, z, t) \\
 &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \frac{\partial v_x}{\partial t} dt
 \end{aligned}$$

L'expression précédente montre que nous pouvons faire apparaître le produit scalaire entre le vecteur déplacement infinitésimal $d\vec{OM}$ et l'opérateur

vectorel $\vec{\nabla}$ qui a pour expression en coordonnées cartésiennes $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

afin d'obtenir une expression intrinsèque. La relation précédente se réécrit donc :

$$dv_x = (d\vec{OM} \cdot \vec{\nabla}) v_x + \frac{\partial v_x}{\partial t} dt$$

La dérivée de la composante v_x par rapport au temps a donc pour expression :

$$\frac{dv_x}{dt} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \right) v_x + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

Il est important de remarquer à ce stade que cette relation est purement mathématique dans le sens où la quantité $\frac{d\vec{OM}}{dt}$ n'a pas d'interprétation physique puisque nous avons considéré deux points de l'écoulement sans lien physique.

Pour fournir une interprétation physique à ce terme, nous **considérons maintenant le cas où la distance $d\vec{OM}$ correspond à la distance parcourue pendant dt par une particule fluide qui va à la vitesse $\vec{v}$ et qui est située en M à l'instant t** . La dérivée $\frac{d\vec{OM}}{dt}$ correspond alors la vitesse $\vec{v}$ de la particule fluide située en M et la dérivée $\frac{d\vec{v}}{dt}$ représente alors **l'accélération d'une particule fluide que peut mesurer un observateur qui suit cette particule fluide des yeux** le long de sa trajectoire (figure 3.3). Nous nommons dans ce cas la dérivée $\frac{d\vec{v}}{dt}$ **dérivée particulaire** et nous la notons $\frac{D\vec{v}}{Dt}$.

La dérivée particulaire de la composante v_x a donc pour expression :

$$\frac{Dv_x}{Dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

La dérivée particulaire des autres composantes du vecteur vitesse s'écrivent :

$$\frac{Dv_y}{Dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_y + \frac{\partial v_y}{\partial t}$$

et

$$\frac{Dv_z}{Dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

La dérivée particulaire du vecteur vitesse d'une particule fluide le long de sa trajectoire a donc pour expression :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{Dv_x}{Dt} \hat{u}_x + \frac{Dv_y}{Dt} \hat{u}_y + \frac{Dv_z}{Dt} \hat{u}_z$$

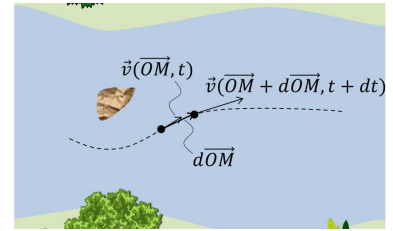


FIGURE 3.2: La quantité $d\vec{v}$ est évaluée le long de la trajectoire d'une particule fluide dans le calcul de la dérivée particulaire.

Point notation ! Il est très important de respecter la notation $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ de la dérivée particulaire pour en souligner le sens physique. C'est une dérivée associée à une particule que l'observateur suit des yeux.

$$= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x \hat{u}_x + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_y \hat{u}_y + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_z \hat{u}_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} \hat{u}_x + \frac{\partial v_y}{\partial t} \hat{u}_y + \frac{\partial v_z}{\partial t} \hat{u}_z$$

- L'accélération d'une particule fluide que l'observateur suit des yeux a donc pour expression :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (3.1)$$

La relation précédente fait donc apparaître trois termes.

- Le terme $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ représente le taux de variation du vecteur vitesse en suivant la particule des yeux. C'est **la dérivée particulaire de la vitesse que mesure un observateur qui suit la particule fluide des yeux**.
- Le terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ représente **la dérivée du vecteur vitesse que peut mesurer un observateur en mesurant la vitesse en un point fixe**. Par exemple, la vitesse de l'écoulement de l'eau d'une rivière mesurée par un observateur en un point peut augmenter après de fortes précipitations. C'est le taux de variation locale du vecteur vitesse.
- Le terme $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ représente **la dérivée convective**. Il représente l'accélération d'une particule due à la variation spatiale du champ de vitesse. Par exemple, la vitesse d'écoulement d'une particule fluide d'une rivière peut augmenter à cause du rétrécissement de la rivière même en régime permanent (figure 3.4). Cette accélération est l'accélération ressentie par une particule fluide lors de son exploration du champ de vitesse. Nous verrons par la suite que ce terme revêt une importance particulière car **il est non linéaire**.

Exemple

Soit un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse est défini par $\vec{v}(\vec{r}, t) = -ky\hat{u}_x + kx\hat{u}_y$ dans le plan (x, y) . L'accélération d'une particule fluide dans ce champ de vitesse est donnée par $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \left(-ky\frac{\partial}{\partial x}\right)(-ky\hat{u}_x + kx\hat{u}_y) + \left(kx\frac{\partial}{\partial y}\right)(-ky\hat{u}_x + kx\hat{u}_y) = -k^2y\hat{u}_y - k^2x\hat{u}_x = -k^2\vec{OM}$. Autrement dit, l'accélération des particules fluides est centripète.

Nous pouvons appliquer l'opérateur dérivée particulaire à d'autres grandeurs transportées par une particule fluide le long de sa trajectoire.

Ainsi la dérivée particulaire de la masse volumique d'une particule fluide le long de sa trajectoire a pour expression :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho$$

Ainsi la dérivée particulaire de la température d'une particule fluide le long de sa trajectoire a pour expression :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T$$

Nous allons maintenant montrer une autre forme très importante de la dérivée particulaire pour ceux qui ont suivi l'option électromagnétisme.

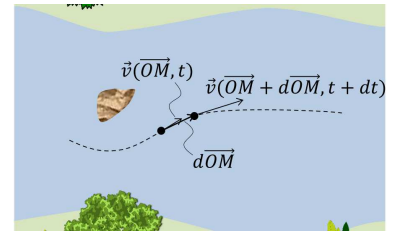


FIGURE 3.3: La quantité $d\vec{v}$ est évaluée le long de la trajectoire d'une particule fluide dans le calcul de la dérivée particulaire.

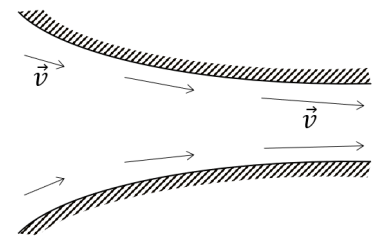


FIGURE 3.4: Accélération d'une particule fluide en régime permanent du à un rétrécissement de l'écoulement.

☞ Un fluide est incompressible si la masse volumique d'une particule fluide que l'on suit des yeux ne varie pas. Un fluide incompressible doit donc respecter $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho = 0$. La masse volumique du fluide peut changer en un point fixe car une particule plus dense peut remplacer la particule précédente.

3.1.3 Deuxième forme de la dérivée particulaire*

Il est possible de montrer en utilisant un système de coordonnées cartésiennes la relation suivante :

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} = \vec{\nabla} \left(\frac{a^2}{2} \right) + \text{rot } \vec{a} \wedge \vec{a}$$

Ainsi, le terme $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ de la dérivée particulaire peut se réécrire :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}$$

Nous pouvons donc réécrire la dérivée particulaire sous la forme :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v} \quad (3.2)$$

C'est cette forme que nous allons utiliser pour calculer l'accélération d'une particule fluide dans un système de coordonnées non cartésien.

☞ Nous allons montrer dans la section suivante, que le terme $\text{rot } \vec{v}$ renseigne sur la rotation pure des particules fluides. Ainsi, pour un fluide irrotationnel, l'accélération d'une particule fluide est donnée par :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

3.2 Lignes de courant, trajectoires et lignes d'émission

3.2.1 Lignes de courant

La description eulérienne du fluide nous permet de définir la notion de **lignes de courant**¹. Il s'agit des courbes le long desquelles le vecteur vitesse est tangent en tout point. Nous les obtenons mathématiquement en résolvant $d\vec{OM} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ où $d\vec{OM}$ est un déplacement infinitésimal le long d'une ligne de courant.

Une ligne de courant est donc donnée par l'équation :

$$d\vec{OM} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (3.3)$$

En coordonnées cartésiennes, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Un **tube de courant** est une surface engendrée par l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé. Un tube de courant contient toujours le même nombre de lignes de champ.

Notons que **les lignes de courant ne peuvent pas se croiser** puisqu'il existe un seul vecteur vitesse en un point donné.

1. c'est une ligne de champ en électromagnétisme.

Exemple

Soit un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse est défini par $\vec{v}(\vec{r}, t) = -ky\hat{u}_x + kx\hat{u}_y$ dans le plan (x, y) . l'équation des lignes de courant est donnée par $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$ soit $xdx + ydy = 0$. L'équation d'une ligne de courant qui passe par le point (x_0, y_0) est donc donnée par $\int_{x_0}^x xdx + \int_{y_0}^y ydy = 0$ soit $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ ce qui représente l'équation d'un cercle de rayon $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ centré en $(0, 0)$.

3.2.2 Trajectoires

La notion de **trajectoire** est la même que celle définie en mécanique du point. Il s'agit de **la trajectoire suivie par une particule fluide que l'on suit des yeux**. La trajectoire d'une particule fluide est donc obtenue en suivant la même procédure quand mécanique du point, il faut trouver les équations horaires du mouvement en résolvant $\frac{dx}{dt} = v_x(\vec{OM}, t)$, $\frac{dy}{dt} = v_y(\vec{OM}, t)$ et $\frac{dz}{dt} = v_z(\vec{OM}, t)$ avec la condition initiale que la particule est en $\vec{OM}_0$ à $t = 0$ puis éliminer le temps entre les équations.

Expérimentalement, nous pouvons visualiser une trajectoire en prenant une photo du déplacement du particule fluide coloré avec un long temps d'exposition. Les positions successives de la particule vont être capter par le capteur de l'appareil photo et nous montrer la trajectoire de la particule.

3.2.3 Ligne d'émission

Il reste un troisième concept intéressant qui correspond à **la ligne visualisée en plaçant une source de colorant dans un fluide**. L'écoulement n'est pas stationnaire, les particules de fluide qui passent successivement par la pastille de colorant suivent des trajectoires différentes avec des vitesses différentes (figure 3.7). A un instant donné, une photo de toutes ces particules colorées montre une ligne appelée **ligne d'émission**.

3.3 Autres techniques de visualisation

Il existe beaucoup d'écoulements pour lesquels l'indice optique du fluide varie localement au cours de l'écoulement, c'est par exemple le cas lors d'un changement de température ou de densité du fluide.

Dans ce cas, nous pouvons utiliser la réfraction de la lumière pour visualiser l'écoulement. Nous pouvons également utiliser des méthodes d'interférométrie optique car la phase de l'onde varie en fonction de l'indice vue par l'onde pendant son trajet.

Ces méthodes ont également l'avantage d'éviter d'avoir à injecter un marqueur dans l'écoulement.

Un shadowgraphe permet ainsi d'observer l'ombre de l'écoulement du à la réfraction de la lumière. Cette image permet de visualiser les régions de saut d'indice.



FIGURE 3.5: Une photo avec un temps d'exposition de l'ordre d'une minute permet de visualiser la trajectoire d'une voiture sur une route rapide.

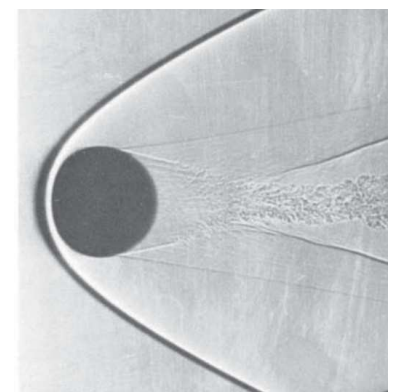


FIGURE 3.6: Shadowgramme d'une sphère se propageant dans l'air à trois fois la vitesse du son. On observe l'onde choc devant la sphère.

3.4 Écoulement permanent

Nous allons dans la suite du cours parler quasiment que d'écoulement permanent. Un écoulement est **permanent (ou stationnaire) lorsque le champ des vecteurs vitesses n'évolue pas dans le temps**. Autrement dit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad (3.4)$$

pour un écoulement permanent.

Attention, les particules fluides sont en mouvement mais la vitesse en un point fixe du fluide ne change pas. Par contre, la vitesse d'une particule fluide que l'on suit des yeux évolue avec le temps.

La video <https://www.youtube.com/watch?v=M0BcdnRQ4jY> montre un exemple d'écoulement laminaire permanent.

Ainsi, la dérivée particulaire a pour expression $\frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ pour un écoulement permanent.

Dans le cas **d'un écoulement permanent, les trajectoires, les lignes de courant et les lignes d'émission coïncident**. En effet, les lignes de courant ne changent pas au cours du temps lorsque l'écoulement est permanent, une particule émise depuis un point suit donc la ligne de courant et il y a coïncidence entre les trajectoires, les lignes d'émission et les lignes de courant.

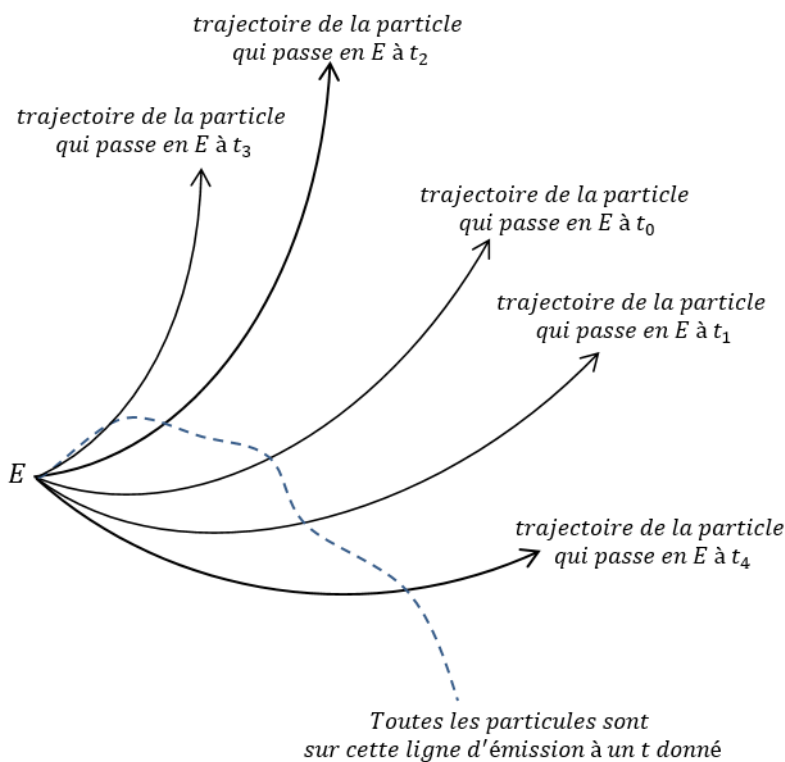


FIGURE 3.7 – Définition d'une ligne d'émission.