CHAPITRE 1

Les fluides au repos : la pression

Objectifs :

- définir un fluide
- définir la pression dans un fluide
- définir la loi de l'équilibre hydrostatique
- calculer l'évolution de la pression avec la profondeur dans un liquide incompressible.
- calculer l'évolution de la pression avec l'altitude dans une atmosphère isotherme.
- calculer la résultante des forces pressantes.

1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?

1.1.1 Définition

Un fluide possède les caractéristiques principales suivantes :

- Un fluide est **un milieu au sein duquel les particules peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est le cas des gaz et des liquides simples ou complexes**.
- Une caractéristique commune aux fluides est qu'il finissent toujours par **occuper tout le volume disponible. Ce temps est d'autant plus long que le fluide est visqueux**.
- A l'échelle macroscopique, la différence entre les fluides et les solides provient de la différence de comportement avec les forces tangentielles à la surface. Un solide peut résister à une force tangentielle tandis qu'un fluide va se déformer continument sous l'action d'une force tangentielle.

Il existe une très grande diversité des paramètres intrinsèques aux fluides (comme la masse volumique ou la viscosité par exemple). Pour un même fluide, il existe également une très large gamme de comportements qui sont fonctions de l'échelle de temps de l'observation, des sollicitations mécaniques exercées sur le fluide et du type d'écoulement.

1.1.2 Équilibre thermodynamique local

Nous allons par la suite utiliser abondamment le concept de particule fluide. **Une particule fluide est un élément de volume du fluide petit à l'échelle de l'écoulement mais grand devant le libre parcours moyen**. C'est un élément de volume à l'échelle mésoscopique. Nous allons considérer dans la suite que la particule fluide est **à l'équilibre thermodynamique local** de telle sorte que nous allons pouvoir définir en chaque point du fluide la température T, la pression P, la vitesse du fluide ....

☞ L'échelle mésoscopique se situe entre l'échelle microscopique et macroscopique.

☞ Un fluide est à l'équilibre thermodynamique local si le temps de retour à l'équilibre est petit devant l'échelle de temps du phénomène qui perturbe l'équilibre du système. Par exemple, il est possible de parler de la température de l'air dans une pièce en chaque point car l'échelle de temps des collisions entre particules qui ramènent le fluide à l'équilibre thermique par conduction est bien plus court que l'échelle de temps de la variation de la température due au dispositif de chauffage de la pièce.

1.2 La pression hydrostatique

Avant de détailler l'expression de la pression au sein d'un liquide ou d'un gaz et d'expliquer quelques résultats expérimentaux, commençons par préciser quelques notions sur les forces de contact dans un milieu continu. Prenons un élément de surface au sein d'un milieu continu. Le milieu exerce une force de contact sur cette surface. La direction de cette force est quelconque mais nous pouvons toujours la décomposer en une partie perpendiculaire à la surface de contact et une partie dans le plan de la surface. **La composante normale à la surface est la force pressante tandis que la composante tangentielle est la force de cisaillement** (figure 1.1).

Seules les forces de pression peuvent exister dans un fluide au repos. En effet, isolons une portion de fluide par la pensée et appliquons une force de cisaillement à sa surface. Le fluide va alors s'écouler pour retrouver un nouvel état d'équilibre où la force de cisaillement est nulle. Nous considérons dans ce chapitre un fluide au repos ou seules les forces de pression existent. Nous pouvons donc retenir le résultat suivant : **seules les forces de pression peuvent exister dans un fluide au repos. Les forces de cisaillement existent uniquement dans un fluide en mouvement**.

☞ Par contre, les forces de cisaillement existent dans un solide au repos.

Délimitons par la pensée une surface de taille S au sein du fluide. La force de pression est due aux chocs exercées par les molécules sur la surface. Puisque le nombre de molécules en contact avec la surface est proportionnel à la taille de la surface, nous écrivons que la force de pression est proportionnelle à la taille de la surface. La force pressante qui s'exerce sur une surface de taille S a donc une valeur égale à PS où P est la pression. La pression est donc une force par unité de surface.

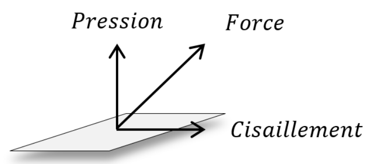


FIGURE 1.1: Composantes normale et tangentielle de la force s'exerçant sur une surface.

Nous devons cependant être plus précis dans notre relation pour pouvoir définir la pression en un point donné. La force pressante est un vecteur, nous devons donc préciser l'orientation de la surface en un point donné pour définir la pression. Rappelons pour cela qu'un vecteur permet naturellement de représenter une force mais également une surface. Dans ce dernier cas, la direction du vecteur est localement perpendiculaire à la surface et la norme du vecteur représente la taille de la surface. L'orientation de la normale à la surface n'est par-contre pas une propriété de la surface et doit donc être fixée arbitrairement. Ainsi, si nous considérons un élément infinitésimal d'une surface entourant un volume de fluide, la normale à cet élément de surface noté $d\vec{S}$ est orientée vers l'extérieur du volume par convention (figure 1.2).

Appliquons maintenant une force $d\vec{F}$ sur cet élément de surface et imaginons que le milieu extérieur « pousse » sur cette surface.

- Nous définissons la pression par la relation :

$$\boxed{d\vec{F} = -Pd\vec{S}_{ext}} \tag{1.1}$$

où P est la pression positive exercée par le milieu extérieur et où le signe moins provient de notre convention sur l'orientation de la surface.

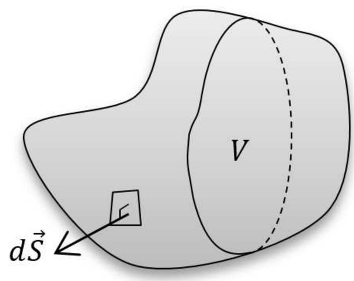
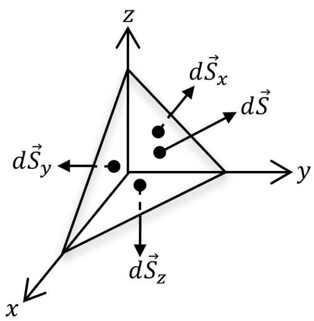


FIGURE 1.2: La normale à un élément de surface est orientée vers l'extérieur par convention.

- L'unité de la pression est le Pascal de symbole Pa. La relation précédente montre que $1\,\text{Pa} = 1\,\text{N}\,\text{m}^{-2}$. On définit 1 atm=1013 hPa et 1 bar=10^5 Pa.

Pour aller plus loin

La pression définit par la relation 1.1 est une **quantité scalaire** ce qui implique que la valeur de la pression, définie en chaque point de l'espace, ne dépend pas de l'orientation de la surface considérée. Nous allons démontrer cette assertion en considérant le volume de la figure suivante.



Ce volume délimite une portion de fluide fixe. En conséquence, le principe d'inertie stipule que la somme des forces s'exerçant sur ce volume est nul. Nous considérons pour l'instant que la pression dépend de l'orientation de la surface. Nous écrivons donc :

$$\rho \vec{g} dV - Pd\vec{S} + P_x dS_x \widehat{u}_x + P_y dS_y \widehat{u}_y + P_z dS_z \widehat{u}_z = \vec{0}$$

Où $\widehat{u}_x$, $\widehat{u}_y$ et $\widehat{u}_z$ sont les vecteurs unitaires du repère de la figure. Celle égalité doit rester vrai quelque soit la taille du volume considéré. Autrement dit, pour un volume infiniment petit, nous obtenons :

$$Pd\vec{S} = P_x dS_x \widehat{u}_x + P_y dS_y \widehat{u}_y + P_z dS_z \widehat{u}_z$$

Or :

$$Pd\vec{S} = PdS_x \widehat{u}_x + PdS_y \widehat{u}_y + PdS_z \widehat{u}_z$$

Nous obtenons donc $P_x = P_y = P_z = P$. La pression est donc bien une grandeur scalaire.

Pour aller plus loin

La force pressante exercée sur une surface dépend de la taille de la surface et ne représente donc pas une quantité intrinsèque au type de fluide. Nous utilisons donc en physique la notion de contrainte de symbole σ qui est la force par unité de surface.
La contrainte revêt un nouveau caractère mathématique pour la raison suivante. Rappelons déjà qu'un vecteur permet naturellement de représenter une force mais également une surface. Dans ce dernier cas, la direction du vecteur est localement perpendiculaire à la surface et la norme du vecteur représente la taille de la surface. Pour spécifier une force par unité de surface dans un milieu continu, il faut donc un objet à 9 coefficients qui permette de rendre compte du caractère « doublement vectoriel » d'une telle quantité. Un tel objet est un tenseur à deux indices. Un indice est utilisé pour spécifier la direction de la force et l'autre indice est utilisé pour spécifier la direction de la surface. Plus précisément, le tenseur des contraintes

qui a pour symbole $\bar{\bar{\sigma}}$ est défini par :

$$dF_i = \sum_j \sigma_{ij} dS_j$$

où dF_i est la composante du vecteur force, dS_j est la composante du vecteur surface et σ_{ij} sont les composantes du tenseur des contraintes. Supposons que nous repérions les points dans l'espace à l'aide d'un système de coordonnées cartésien. Le tenseur des contraintes s'exprime alors comme une matrice 3×3 donnée par :

$$\begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{pmatrix}$$

Dans l'équation précédente, σ_{xy} représente la force exercée selon l'axe Ox sur une surface orientée selon Oy. Les termes diagonaux de la matrice précédente représente la pression.

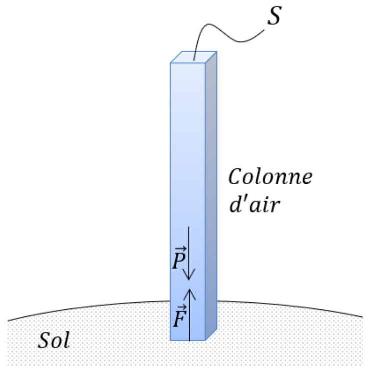


FIGURE 1.3: Colonne d'air de surface S qui va du sol jusqu'au haut de l'atmosphère.

1.3 La pression atmosphérique au niveau du sol, les dépressions et les anticyclones

La pression est une grandeur fondamentale en météorologie. Les différences de pression entre les différentes régions de l'atmosphère sont le moteur du vent. Nous verrons dans les chapitres ultérieurs les détails de ce mécanisme. Nous allons pour l'instant nous intéresser à la valeur de la pression atmosphérique au niveau du sol.

La figure 1.3 montre une colonne d'atmosphère. Cette colonne d'air est soumise à la force exercée par le sol sur la colonne d'air ainsi qu'à son propre poids. Or, la force pressante F qu'exerce les molécules d'air sur le sol est égale à la force qu'exerce le sol sur la colonne d'air d'après la réciprocité des forces. Nous avons donc :

$$\vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$$

La projection de cette relation sur l'axe Oz donne $F = mg$ avec $F = P_0 S$ où S est la section de la colonne d'air et P_0 est la pression atmosphérique au niveau du sol. Nous obtenons donc :

$$P_0 = \frac{mg}{S}$$

Ainsi, **la pression atmosphérique au niveau du sol représente le poids d'une colonne d'air de section égale à $1\,\mathrm{m}^2$**. La pression atmosphérique moyenne est égale à $1013\,\mathrm{hPa}$, le poids d'une colonne d'air de section $1\,\mathrm{m}^2$ qui va du sol jusqu'au haut de l'atmosphère est donc de l'ordre de $10^5\,\mathrm{N}$ (g varie avec l'altitude, nous donnons donc un ordre de grandeur) ce qui correspond à une masse d'environ $10\,\mathrm{t}$.

Une dépression correspond à une diminution de la masse d'air dans la colonne, la pression atmosphérique au niveau du sol diminue dans ce cas. **Un anticyclone correspond à une augmentation de la masse d'air dans la colonne**, la pression atmosphérique au niveau du sol augmente dans ce cas. Nous verrons dans le chapitre suivant les mécanismes qui peuvent conduire à la diminution ou l'augmentation de la masse d'air.

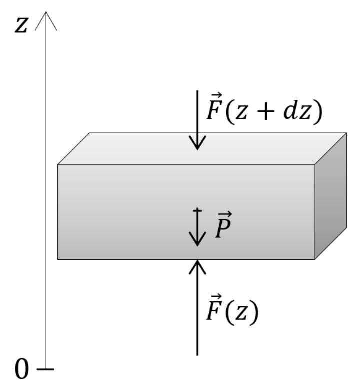


FIGURE 1.4: Tranche de fluide comprise entre z et $z + dz$.

1.4 L'équilibre hydrostatique

Nous considérons dans cette section un fluide sans mouvement d'ensemble dans un champ de pesanteur et nous étudions **une parcelle de fluide à l'équilibre**. Nous allons montrer que l'évolution de la pression dans le fluide est alors donnée par une loi appelée loi de **l'équilibre hydrostatique**. Nous allons démontrer la loi de l'équilibre hydrostatique en étudiant l'équilibre des forces sur un volume de fluide de forme particulière. Nous considérons une tranche de fluide de surface S et d'épaisseur dz (figure 1.4).

Cette tranche de fluide est soumise à son propre poids ainsi qu'à la force pressante $\vec{F}(z+dz)$ exercée par le fluide extérieure en $z+dz$ et la force pressante $\vec{F}(z)$ exercée par le fluide extérieure en z (les forces pressantes exercées par le fluide sur les autres faces se compensent). Notons que la force pressante au niveau z est plus intense que la force pressante au niveau $z+dz$ car la force d'attraction de la pesanteur qui s'exerce sur les particules implique qu'il y a davantage de particules au niveau z qu'au niveau $z+dz$. C'est cette différence d'intensité dans la force pressante qui compense le poids infinitésimal dP de la tranche de fluide. Le principe d'inertie appliqué au système a pour expression :

$$\rho S dz \vec{g} + \vec{F}(z+dz) + \vec{F}(z) = \vec{0}$$

Où $\rho S dz \vec{g}$ est le poids de la tranche d'air. Projetée sur un axe verticale orientée vers le haut, cette équation devient :

$$-\rho S dz g - F(z+dz) + F(z) = 0$$

La surface de la couche d'air est plane, nous avons donc $F(z+dz) = P(z+dz)S$ et $F(z+dz) = P(z+dz)S$, nous obtenons donc :

$$-\rho g dz - P(z+dz) + P(z) = 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g} \tag{1.2}$$

Nous pouvons généraliser pour obtenir une relation indépendante du système de coordonnées choisi. Nous avons utilisé un axe vertical Oz pour établir la relation précédente. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{dP}{dz}\widehat{u}_z = -\rho g \widehat{u}_z = \rho \vec{g}$$

Nous introduisons le vecteur nabla de composantes $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ noté $\vec{\nabla}$ pour obtenir $\vec{\nabla}P.\widehat{u}_z = \rho\vec{g}.\widehat{u}_z$. Le vecteur $\widehat{u}_z$ est arbitraire, nous obtenons le résultat suivant.

- L'équation fondamentale de l'hydrostatique a pour expression :

$$\boxed{\vec{\nabla}P = \rho\vec{g}} \tag{1.3}$$

  où cette équation ne fait appelle à aucun système de coordonnées.
- $\vec{\nabla}P$ est un vecteur orienté des basses vers les hautes pressions. L'équation fondamentale de l'hydrostatique montre que la pression augmente dans le sens de $\vec{g}$.
- Par définition, nous avons $dP = \vec{\nabla}P.d\overrightarrow{OM}$ où $d\overrightarrow{OM}$ est le vecteur déplacement d'où $dP = \rho\vec{g}.d\overrightarrow{OM}$. Le long d'une isobare, nous avons

Le saviez-vous ? L'équilibre hydrostatique signifie qu'il n'y a pas de mouvement d'ensemble du fluide. Par contre, au niveau microscopique, des particules du fluide sortent et rentrent constamment du volume choisi mais, en moyenne, le volume choisi contient toujours le même nombre de particules.

☞ La notation dz est plus que nécessaire ici. Pour établir une relation valide en un point d'altitude z, il faut utiliser une tranche de fluide infiniment fine.

☞ La loi de l'équilibre hydrostatique que nous avons établie ici est valide également pour un solide dans le cas où les forces de pression sont suffisamment importantes que que la structure interne du matériau et les forces de cisaillement disparaissent. Par exemple, une roche en équilibre sur une montagne n'est clairement pas à l'équilibre hydrostatique. De même une poutre dans un immeuble n'est évidement pas à l'équilibre hydrostatique. Par contre un morceau de roche à l'intérieur de la Terre va être soumis à des forces de pression qui vont largement dominer toutes les autres forces et nous pouvons le considérer à l'équilibre hydrostatique. De manière générale, il faut retenir que l'intérieur d'une planète est à l'équilibre hydrostatique. Par contre, une météorite de forme quelconque n'est pas à l'équilibre hydrostatique.

$dP = 0$. Le déplacement $d\overrightarrow{OM}$ le long d'une isobare est donc orthogonal au vecteur $\vec{g}$. Ainsi, les isobares sont orthogonales à $\vec{g}$ dans un fluide hydrostatique.

Pour aller plus loin

Nous pouvons démontrer la loi de l'équilibre hydrostatique pour un volume quelconque en utilisant le théorème d'Ostrograsdki. La force totale s'exerçant sur la surface entourant notre volume quelconque de liquide a pour expression :

$$\vec{F} = -\oiint_S P d\vec{S}$$

Le théorème d'Ostrograsdki s'écrit :

$$\oiint \vec{A}.\mathrm{d}\vec{S}_{ext} = \iiint \mathrm{div}\ \vec{A}\ \mathrm{d}V$$

Prenons un vecteur $\vec{A} = P\widehat{u}_x$. Nous avons alors $\oiint P\mathrm{d}S_x = \iiint \frac{dP}{dx}\mathrm{d}V$ soit $\oiint P\mathrm{d}\vec{S}.\widehat{u}_x = \iiint \vec{\nabla} P.\widehat{u}_x \mathrm{d}V$. Le vecteur unitaire $\widehat{u}_x$ est arbitraire, l'égalité suivante doit donc être vérifiée :

$$\oiint P\mathrm{d}\vec{S} = \iiint \vec{\nabla} P\mathrm{d}V$$

Le principe d'inertie stipule que nous devons avoir $\vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$ où m est la masse de fluide contenue dans le volume V. Nous en déduisons $\vec{F} = -\iiint \rho\vec{g}\ dV$ d'où, en combinant les différentes relations :

$$\vec{\nabla} P = \rho\vec{g}$$

1.5 La pression dans un liquide homogène incompressible

1.5.1 Expression de la pression hydrostatique dans un liquide

Le coefficient de compressibilité isotherme d'un liquide est suffisamment faible pour pouvoir considérer les liquides au repos incompressibles. Nous pouvons alors déterminer la pression dans un liquide à une profondeur h en intégrant l'équation de l'équilibre hydrostatique en prenant $\rho = cst$. Pour étudier la pression dans un liquide, nous allons utiliser le système d'axe montré dans la figure 1.5. L'axe Oz pointe vers le bas et le niveau 0 est au niveau de la surface. Ce changement **dans le sens de l'axe a pour conséquence que la relation 1.3 établie précédemment devient $\frac{dP}{dz} = \rho g$** et son intégration avec ρ constant conduit à $P = P_0 + \rho g z$.

Nous pouvons également démontrer cette relation en utilisant directement un système de taille macroscopique. Pour un fluide incompressible, le poids de la colonne de fluide a pour expression $\rho S h$. A l'équilibre, le principe d'inertie appliqué à la colonne de liquide en pointillée a pour expression :

$$\rho S h g + P_0 S - P S = 0$$

soit :

$$P = P_0 + \rho g h$$

Notons que cette démonstration reste valide pour un fluide dont la masse

☞ Le coefficient de compressibilité isotherme a pour expression $\chi_T = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$. Pour l'eau, $\chi_T = 5 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{N}^{-1}$ à $T = 293\,\mathrm{K}$.

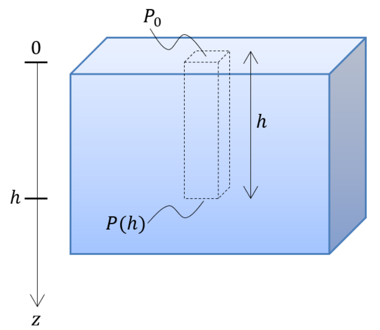


FIGURE 1.5: Pression dans un liquide.

volumique varie avec l'altitude mais c'est la valeur moyenne de la masse volumique qui apparait alors dans l'expression de la pression.

Exemple

Nous pouvons chercher la profondeur à laquelle la pression est deux fois plus élevée que la pression atmosphérique au niveau du sol dans l'eau. L'équation précédente montre que $h = \frac{P_0}{\rho g} \simeq 10\,\mathrm{m}$. Ainsi, la pression atmosphérique double tous les 10 m dans l'eau.

Nous pouvons donc retenir le résultat suivant :

- La pression entre deux points A et B séparés d'une hauteur h dans un liquide homogène incompressible a pour expression :

$$\boxed{P_A = P_B + \rho g h} \tag{1.4}$$

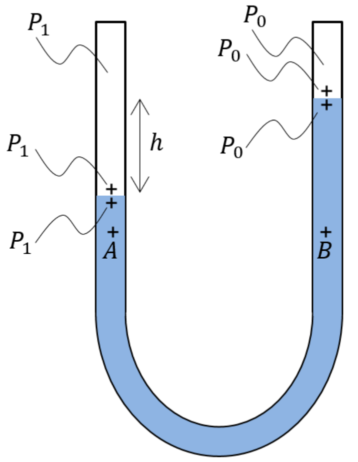


FIGURE 1.6: Liquide dans un tube en U fermé.

La figure 1.6 montre un tube en U fermé et rempli d'un liquide. Lorsque le liquide est à l'équilibre, le principe d'inertie montre que **la pression ne varie pas le long d'une ligne horizontale.** Ainsi, nous avons $P_A = P_B$ dans l'exemple de la figure 1.6 en accord avec la formule précédente.

Exemple

La pression artérielle correspond à la mesure de la surpression développée par le ventricule gauche du cœur par rapport à la pression atmosphérique. La relation $P_A = P_B + \rho g h$ explique les variations de pression qui existent entre les différents points du corps humain. La suppression au niveau du cœur est de l'ordre de 13 kPa. Cette surpression diminue jusqu'à 9 kPa au niveau de la tête et atteint 27 kPa dans l'artère pédieuse. Ainsi, une prise correcte de la pression artérielle au niveau du bras s'effectue allongé ou avec le bras au niveau du cœur.

✍ **Vous pouvez maintenant faire les exercices 1, 2, 8, 9, 10, 11 et 12.**

1.5.2 Conditions aux limites

Considérons une interface entre deux fluides. Cette interface est immobile si le fluide est à l'équilibre hydrostatique. Le principe d'inertie appliqué à l'interface implique que la pression du fluide juste au dessus de la surface du fluide est égale à la pression juste en dessous. Nous pouvons donc retenir les résultats suivants :

- Il y a **continuité de la pression à l'interface entre deux fluides**.
- Cette assertion est vrai uniquement si **l'interface entre les fluides est plane**. On observe dans le cas contraire un saut de pression qui est donné par **la loi de Laplace** que nous étudierons dans le chapitre sur les interfaces entre fluides.

La figure 1.6 montre une application de ce résultat. Nous en déduisons que $P_1 = P_0 + \rho g h$.

1.6 Les "paradoxes" hydrostatiques

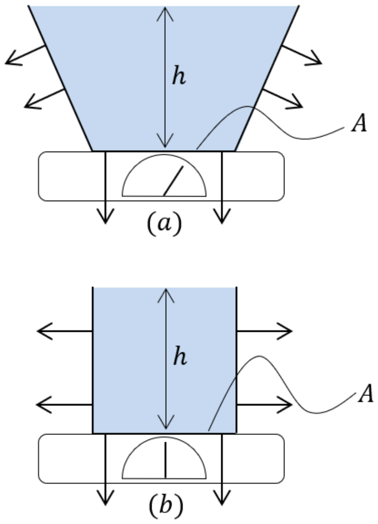


FIGURE 1.7: Exemple de paradoxe hydrostatique.

La figure 1.7 montre un exemple de paradoxe hydrostatique. La masse d'eau dans le récipient (a) est plus important que la masse d'eau dans le récipient (b). Pourtant la pression qui s'exerce sur la surface A inférieure de chaque récipient est égale à $P_0 + \rho g h$ dans les deux cas. Nous pourrions en déduire que la force qui s'exerce sur la face inférieure est identique dans les deux cas et que les deux balances devraient indiquer la même valeur.

Cependant, il faut tenir compte de la force pressante exercée par l'eau sur les parois. Dans le cas du récipient (a), la force pressante exercée sur les parois a une composante verticale orientée vers le bas qui augmente la force pressante exercée par l'eau sur la balance.

Exemple

La video intitulée "The Hydrostatic Paradox - Explained!" `https://www.youtube.com/watch?v=6zeHWVUiXoc` montre quelques exemples de "paradoxes" hydrostatiques. Ces paradoxes sont des expériences donc le résultat semblent contraire à l'intuition mais qui s'expliquent par une application rigoureuse de la notion de pression.

1.7 Déplacement d'ensemble d'un fluide

FIGURE 1.8: Le déplacement d'un verre rempli d'eau est un exemple de déplacement de fluide en bloc. Nous pouvons observer que la surface du fluide s'incline lorsque la vitesse de déplacement du verre varie.

Nous considérons dans cette section un mouvement d'ensemble du fluide en bloc, c'est-à-dire que les **couches de fluide ne se déplacent pas les unes par rapport aux autres**. Dans ce cas, nous sommes dans les conditions d'étude d'un fluide au repos mais le fluide est dans un référentiel en mouvement par rapport au référentiel d'étude (voir figure 1.8).

L'équation de l'équilibre hydrostatique est toujours valide dans le référentiel lié au fluide qui se déplace en bloc mais l'accélération en bloc du fluide a pour effet de modifier l'accélération de la pesanteur ressentie par le fluide. Nous allons établir comment se modifie l'accélération de la pesanteur dans un référentiel $\mathcal{R}'$ lié au fluide en mouvement à la vitesse $\vec{u}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ en prenant l'exemple d'un verre d'eau tenu dans la main et déplacé dans une direction quelconque. Nous nommons M la position d'une particule fluide du verre d'eau, O' le centre du repère lié au verre d'eau et O le centre du repère lié à $\mathcal{R}$. Nous avons $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ d'où $\vec{v}_{\mathcal{R}} = \vec{u}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{v'}_{\mathcal{R}'}$ soit $\vec{a}_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}\vec{u}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \vec{a'}_{\mathcal{R}'}$. L'accélération de la particule fluide dans le verre d'eau dans le référentiel $\mathcal{R}'$ a donc pour expression $\vec{a'}_{\mathcal{R}'} = \vec{a}_{\mathcal{R}} - \frac{d}{dt}\vec{u}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$. D'après le principe fondamental de la dynamique, l'accélération de la particule fluide dans le référentiel $\mathcal{R}$ a pour expression $m\vec{a}_{\mathcal{R}} = m\vec{g} + \vec{F}$ où $\vec{F}$ représente la force pressante totale qui s'exerce sur une particule fluide et m est la masse de la particule fluide. Nous en déduisons que le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule fluide dans le référentiel $\mathcal{R}'$ a pour expression $m\vec{a'}_{\mathcal{R}'} = m\left(\vec{g} - \frac{d}{dt}\vec{u}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\right) + \vec{F}$. Ainsi, tout ce passe comme-ci l'accélération de la pesanteur dans le référentiel en mouvement a pour expression $\vec{g'} = \vec{g} - \frac{d}{dt}\vec{u}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ et l'équation fondamentale de l'hydrostatique a pour expression dans ce référentiel :

☞ L'accélération de la particule fluide dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est nulle tandis quelle est non nulle dans le référentiel $\mathcal{R}$ si le verre d'eau n'effectue pas un mouvement de translation rectiligne uniforme.

$$\boxed{\vec{\nabla} P = \rho\vec{g} - \rho\frac{d}{dt}\vec{u}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \tag{1.5}$$

Nous pouvons commenter deux cas particulier :

- Si nous laissons tomber un récipient qui contient un fluide en chute libre, alors $\frac{d}{dt}\vec{u}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{g}$ et la pression dans le fluide est donc constante puisque $\vec{\nabla} P = 0$. C'est le cas d'un fluide en chute libre ou en micro-gravité comme dans la station spatiale internationale.
- Si nous déplaçons en bloc horizontalement un fluide, suivant l'axe Ox par exemple, alors $\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x$ et $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$. Or, la variation de pression entre deux points est donnée par $dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz$. La surface du fluide est une surface isobare donc $dP = 0$ le long de cette ligne. La pente que fait la surface du fluide par rapport à l'horizontale

a donc pour expression $\frac{dz}{dx} = -\frac{a_x}{g}$. C'est ce que nous observons lorsque nous mettons horizontalement en mouvement un verre d'eau.

1.8 Variation de la pression avec la température

1.8.1 Cas du liquide

Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas mentionné de dépendance de la pression hydrostatique dans un liquide avec la température. Ainsi, nous avons implicitement dit que la pression hydrostatique de l'eau au fond d'un verre d'eau froide est identique à la pression hydrostatique au fond d'un verre d'eau chaude. Nous pourrions en conclure que la pression d'un liquide ne dépend pas de la température. Ce résultat est faux et nous allons détailler le raisonnement dans cette section.

Considérons un volume V de liquide. La variation de ce volume en fonction de la température et de la pression est donnée par l'équation d'état du liquide qui a pour expression :

$$V(T, P) = V_0 e^{\alpha(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)}$$

où V_0 est le volume du liquide à P_0, T_0. Pour l'eau, $\chi_T = 5 \times 10^{-10}\,\mathrm{Pa}^{-1}$ et $\alpha = 3 \times 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$. La valeur de ces coefficients dépend de la température et de la pression mais nous négligeons ces variations dans nos raisonnements afin de simplifier les calculs.

☞ L'équation d'état d'un liquide se définie à partir des coefficients thermoélastiques $\chi_T = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ qui représente le coefficient de compressibilité isotherme et $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ qui représente le coefficient de dilatation isobare. L'équation d'état est une fonction qui relie V, T et P. Nous pouvons donc exprimer le volume en fonction de P et T. Par définition, la différentielle de la fonction V s'écrit $dV = V\alpha dT - V\chi_T dP$ d'où $\frac{dV}{V} = \alpha dT - \chi_T dP$. Nous obtenons donc $V(T,P) = V_0 e^{\alpha(T-T_0)-\chi_T(P-P_0)}$ où V_0 est le volume du liquide à P_0, T_0.

- Posons que V_0 soit le volume du liquide à $P_0 = 1\,\mathrm{atm}$ et à $T_0 = 293\,\mathrm{K}$ et cherchons la variation du volume du liquide si la pression passe à 1000 atm sans variation de température. L'équation d'état donne $V(T,P) = V_0 e^{-5.10^{-7}} \approx V_0$. L'eau est quasiment incompressible. Ainsi, si nous chauffons de l'eau dans une **enceinte ouverte**, le liquide va se dilater tellement peu que **la variation de hauteur du liquide dans l'enceinte est négligeable et la variation de pression dans le liquide est donc elle aussi négligeable**. Étudions maintenant le cas d'une enceinte fermée.
- Considérons une enceinte indéformable de volume V rempli d'eau à 293 K et chauffons l'enceinte pour lui faire atteindre une température deux fois plus élevée soit 586 K. L'équation d'état du liquide implique, puisque le volume de la bouteille est invariable, que $V_0 = V_0 e^{\alpha(T_f-T_0)-\chi_T(P_f-P_0)}$ où P_f est la pression atteinte par le liquide lorsque $T = T_f = 586\ K$. La pression P_f est donc donnée par $P_f = \frac{\alpha}{\chi_T}(T_f - T_0) + P_0 = \frac{3.10^{-4}}{5.10^{-10}}(586 - 293) + 1,013.10^5 = 1758.10^5\ Pa = 1758\ bar$!. Autrement dit, **la pression dans un liquide varie fortement avec la température si nous empêchons le liquide de se dilater**.

Dans l'expérience précédente, nous avons considéré un volume indéformable intégralement chauffé. La pression nommée P_f dans l'exemple précédent est donc la valeur moyenne de la pression hydrostatique dans le liquide. En effet, la loi de l'équilibre hydrostatique est toujours vérifiée quelque soit la température du liquide et nous avons donc $P_f = P_{up} + \frac{1}{h}\int_0^h \rho g z dz = P_{up} + \rho g \frac{h}{2}$ où $P_{up} = P_f - \rho g \frac{h}{2}$ est la pression juste sous la surface de la paroi supérieure de l'enceinte. Le saut de pression de part et d'autre de la paroi est donc $P_{up} - P_{atm} = P_f - \rho g \frac{h}{2} - P_{atm}$ tandis que le saut de pression de part et d'autre de la paroi inférieure de l'enceinte a pour expression $P_{down} - P_{atm} = P_f + \rho g \frac{h}{2} - P_{atm}$.

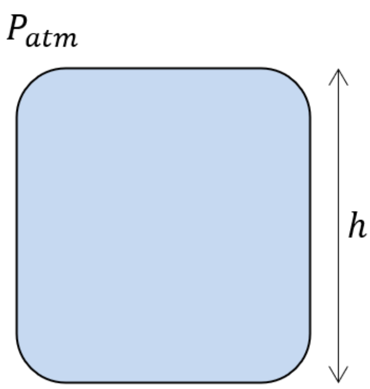


FIGURE 1.9: Liquide dans un volume indéformable.

1.8.2 Cas du gaz

Nous allons par la suite considérer uniquement la pression d'un gaz dans le modèle du gaz parfait. Un gaz parfait est un gaz dont l'énergie potentielle d'interaction des molécules est négligeable devant leur énergie cinétique et dont le volume occupé par les particules est négligeable devant la taille de l'enceinte contenant le gaz.

- L'équation d'état d'un **gaz parfait enfermé dans une enceinte de volume V** a pour expression :

$$\boxed{PV = nRT} \quad (1.6)$$

- A pression et température ambiante, les principaux gaz contenus dans l'atmosphère se comportent comme des gaz dit parfaits
- Si on double la température on double la pression toutes choses étant égales par ailleurs. Nous avons ainsi un résultat très différent du liquide qui provient de la différence sur l'origine de la pression au niveau microscopique entre un liquide et un gaz.

✍ **Vous pouvez maintenant faire l'exercice 4.**

Le cas d'un gaz dans une enceinte ouverte ne se rencontre pas puisque le gaz s'échappe alors de l'enceinte. La seule situation ou nous allons rencontrer ce cas est dans l'atmosphère. Nous pouvons dans ce cas nous demander comment évolue la pression au voisinage d'un radiateur par exemple. Si la pièce dans laquelle le radiateur se trouve est étanche à l'air, alors nous nous retrouvons dans le cas d'une enceinte fermée et la pression dans la pièce augmente. Dans la pratique, les pièces ne sont pas étanche la pression dans la pièce est égale à la pression atmosphérique.

En été, la pression atmosphérique est la même quand hivers car le poids de la colonne d'air est la même. La diminution de la masse volumique compense l'augmentation de température et la pression ne varie pas.

Si nous prenons une enceinte fermée de 300 m par exemple, alors il faut prendre en compte la variation de la pression avec l'altitude. Dans ce cas, la loi $PV = nRT$ devient $< P > V = nRT$ où $< P >$ est la valeur moyenne de la pression dans l'enceinte.

☞ Dans un gaz, la pression augmente avec la température car augmenter la température revient à augmenter l'énergie cinétique moyenne des particules. Les particules du gaz se déplacent alors avec une plus grande vitesse et frappent les parois avec une plus grande vitesse ce qui augmente la force exercée par les particules sur la paroi lors des collisions. Un liquide est un état condensé. Les particules ne sont pas ordonnées les unes par rapport aux autres comme dans un solide mais le libre parcours moyen d'une particule dans un liquide est beaucoup plus faible que dans n gaz. Augmenter la température d'un liquide revient à augmenter l'agitation thermique des particules autour de leur position moyenne. Une particule du liquide se met alors à explorer le voisinage proche de ces particules voisines ce qui se traduit par une très forte force de répulsion ce qui explique la force de pression très élevée qu'exerce un liquide chauffée dans une enceinte fermée. Cette force de répulsion diminue très rapidement avec la distance ce qui explique qu'un liquide ce dilate très peu lorsqu'il est chauffé.

1.9 La pression dans une atmosphère isotherme

1.9.1 Le profil thermique de l'atmosphère

La figure 1.10 montre le profil thermique moyen de l'atmosphère. La couche atmosphérique dans laquelle nous vivons est la troposphère. La température décroit avec l'altitude dans cette partie de l'atmosphère car l'air est chauffé par le rayonnement infrarouge du sol. En effet, le sol absorbe le rayonnement dans le visible et émet du rayonnement dans le domaine infrarouge. La température de l'atmosphère recommence ensuite à augmenter avec l'absorption des ultra-violets par l'ozone dans la stratosphère.

☞ Le profil d'une quantité est l'évolution de la quantité en fonction de l'altitude.

Notons que la température varie d'environ 60 °C entre le sol et la mésosphère. La variation relative de la température autour de la valeur moyenne est donc de $\frac{60}{273} \sim 20\,\%$. Nous allons commencer par étudier le profil de la pression en considérant que la température atmosphérique est constante.

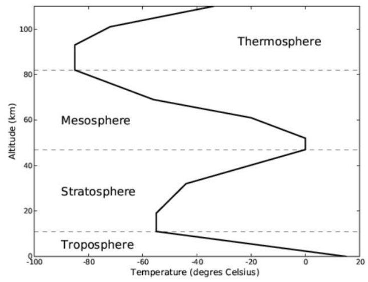


FIGURE 1.10: Profil de température de l'atmosphère. Le terme profil signifie évolution avec l'altitude.

1.9.2 Le profil de la pression dans une atmosphère isotherme

Nous allons établir l'expression du profil $P(z)$ de la pression atmosphérique en utilisant le modèle du gaz parfait dans le cas d'une atmosphère isotherme.

La loi de l'équilibre hydrostatique s'écrit, avec un axe Oz orienté vers le haut $\frac{dP}{dz} = -\rho g$. La masse volumique ρ de l'air en un point d'altitude z dépend de la pression en ce point étant donné qu'un gaz est compressible. L'équation d'état d'un gaz parfait permet de relier $\rho(z)$ à la pression atmosphérique $p(z)$. Considérons un élément infinitésimal dV qui contient dn moles. La loi des gaz parfait a pour expression $P = \frac{dn}{dV}RT = \frac{dm}{dV}\frac{RT}{M_a} = \rho\frac{RT}{M_a}$ où M_a est la masse molaire de l'air.

- L'équation de l'équilibre hydrostatique se réécrit donc $\frac{dP}{P} = -\frac{M_a g}{RT}dz$ qui a pour solution pour une température constante :

$$\boxed{P(z) = P_0 e^{-\frac{M_a g}{RT}z}} \tag{1.7}$$

- $H = \frac{RT}{M_a g}$ est la hauteur d'échelle et vaut 8.5 km pour l'atmosphère de la Terre prise à 288 K.

Nous pouvons déterminer l'expression du profil de la densité n à partir du profil de la pression. La densité d'une parcelle d'air de volume V est donnée par $n = \frac{P}{kT}$. Le profil de densité $n(z)$ a donc pour expression :

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{M_a g}{RT}z}$$

Dans l'expression précédente, le facteur de Boltzmann correspond à :

$$\boxed{e^{-\frac{M_a g}{RT}z} = e^{-\frac{E_p}{kT}}} \tag{1.8}$$

Ce terme traduit la compétition entre l'agitation thermique (terme kT) qui tend à étendre l'atmosphère et le terme énergétique (E_p) qui tend à diminuer l'épaisseur de l'atmosphère.

La probabilité de trouver une particule de masse $m = \frac{M_a}{N_A}$ entre z et $z + dz$ à la température T a pour expression :

$$d\mathcal{P} = Ce^{-\frac{mgz}{kT}}dz$$

Le facteur de normalisation C est obtenue en remarquant que le probabilité de trouver une particule entre $z = 0$ et $z = +\infty$ vaut 1. Autrement dit $1 = C\int_0^{+\infty} e^{-\frac{mg}{kT}z}dz = C\frac{kT}{mg}$ soit $C = \frac{mg}{kT}$. Nous obtenons donc :

$$d\mathcal{P} = \frac{mg}{kT}e^{-\frac{mgz}{kT}}dz$$

Nous pouvons par exemple calculer la probabilité de trouver une particule prise au hasard dans l'atmosphère entre $z = 0$ et $z = H$. Cette probabilité vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \frac{mg}{kT}\int_0^H e^{-\frac{mgz}{kT}}dz \\ &= 1 - e^{-1} = 0.63\end{aligned}$$

✍ **Vous pouvez maintenant faire les exercices 5 et 13.**

Il y donc 63 % des particules comprises entre $z = 0$ et $z = H$.

1.10 Calcul d'une force pressante

1.10.1 Principe de calcul

- La force pressante qui s'exerce sur une paroi est donnée par :

$$\boxed{\vec{F} = -\iint Pd\vec{S}_{ext}} \quad (1.9)$$

- Deux situations peuvent se rencontrer :
  — le vecteur $d\vec{S}$ ne change pas d'orientation lors de l'intégration. Il n'y a pas de complication dans ce cas. Le vecteur $d\vec{S}$ s'exprime en fonction d'un vecteur unitaire qui sort de l'intégrale. Il reste à calculer $\vec{F} = -\hat{u}\iint PdS$

  — le vecteur $d\vec{S}$ change d'orientation lors de l'intégration. Dans ce cas, il faut déterminer avant de faire l'intégrale l'orientation de la force pressante totale et garder la composante de $d\vec{F}$ qui est suivant cette direction. Il faut donc intégrer $F = \int dF_{utile} = -\iint PdS_{utile}$.

1.10.2 Force pressante exercée sur une surface plane

Illustrons la première situation avec le calcul de la force pressante exercée par l'eau sur un barrage (figure 1.11) de la forme d'un parallélépipède rectangle de longueur l et de hauteur H. Soit un élément infinitésimal du barrage. La force pressante qui s'exerce sur cet élément est donnée, par définition, par $d\vec{F} = -P\ d\vec{S}_{ext}$ où $d\vec{S}_{ext}$ est un vecteur orthogonal à la surface et dirigé vers l'extérieur. La pression hydrostatique en un point M situé à la profondeur z a pour expression : $P(M) = P_0 + \rho_0 gz$. La force pressante exercée par l'eau sur le barrage est donc donnée par $\vec{F}_{eau/barrage} = \iint_S (P_0 + \rho_0 gz)\, d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = -d\vec{S}_{ext,eau}$. Le barrage est symétrique par rapport à un plan orthogonal au barrage. Le vecteur force, contenu dans le plan de symétrie, est donc orthogonal au barrage. Nous avons donc $\vec{F}_{eau/barrage} = \iint_S (P_0 + \rho_0 gz)\, dS\vec{u}_x$ et $\vec{F}_{air/barrage} = -\iint_S P_0\ dS\vec{u}_x$. La force totale s'exerçant sur le barrage a donc pour expression :

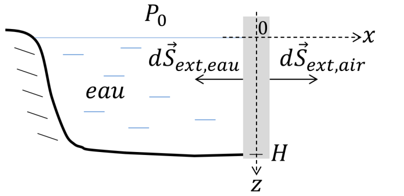


FIGURE 1.11: Schéma du barrage.

$$\vec{F} = \vec{F}_{eau/barrage} + \vec{F}_{air/barrage}$$

$$= \iint_S \rho_0 gzdS\vec{u}_x$$
$$= \int_0^H \rho_0 gzldz$$
$$= \rho_0 gl\frac{H^2}{2}\vec{u}_x$$

Notons que cette dernière expression peut se réécrire $\vec{F} = \rho_0 g\frac{H}{2}S\vec{u}_x$ où S est la surface du barrage et $\rho_0 g\frac{H}{2}$ est la pression hydrostatique à mi-profondeur.

Nous allons montrer que le résultat précédent peut se généraliser si nous souhaitons calculer la force qui s'exerce sur une surface plane dans un fluide (figure 1.12).

La force hydrostatique s'exerçant sur la paroi de hauteur h et largeur l du solide a pour expression :

$$\vec{F}_{fluide/solide} = P_{atm}\int_H^{h+H}\int_0^l dzdy\vec{u} + \rho g\int_H^{h+H}\int_0^l zdzdy\vec{u}$$
$$= P_{atm}lh\vec{u} + \rho gl\left(\frac{(h+H)^2}{2} - \frac{H^2}{2}\right)\vec{u}$$
$$= P_{atm}lh\vec{u} + \rho g\frac{h+H}{2}lh\vec{u}$$

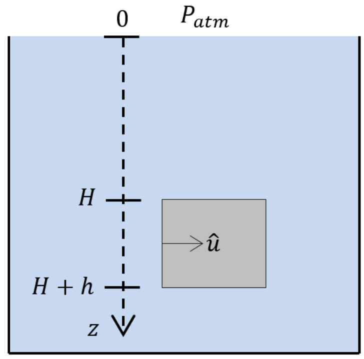


FIGURE 1.12: Notations utilisées pour calculer la force pressante qui s'exerce sur une surface plane plongée dans un fluide.

La dernière expression montre que la force pressante qui s'exerce sur une surface S **plane** plongée dans un fluide a pour expression :

$$\boxed{F = P_{\text{au milieu de la surface}}S} \tag{1.10}$$

✍ **Vous pouvez maintenant faire les exercices 3, 6, 7, 14, 15 et 16.**

1.11 La pression osmotique

La pression osmotique est la pression exercée par un soluté sur une paroi semi-perméable qui laisse passer uniquement le solvant. Lorsque la concentration c de la solution est faible la pression osmotique est donnée par le loi de Van't Hoff qui a la même forme que l'équation d'état d'un gaz parfait :

$$\boxed{\Pi = cRT} \tag{1.11}$$