

## TD : Séries entières

Pour chaque AAV, on vous propose une liste d'exercices pour atteindre l'apprentissage en profondeur : on commence par les classiques puis on ajoute une difficulté supplémentaire à chaque exo pour finir avec des problèmes. Plus vous irez loin dans les exos d'un AAV, plus il sera travaillé en profondeur. Le symbole  $\star$  désigne approximativement le niveau de profondeur et/ou de difficulté. Il est indépendant des niveaux de la grille critériée.

### 1 AAV Déterminer le rayon de convergence d'une série entière

#### 1.1 Exos de l'aav

##### ► Exercice 1. $\star$ Le classique d'Alembert décortiqué

On souhaite déterminer le rayon de convergence de  $\sum nz^n$

1. Démontrer à l'aide du critère de d'Alembert que pour tout  $z$  complexe, si  $|z| < 1$  alors  $\sum nz^n$  converge.
2. En déduire une inégalité sur le rayon.
3. Démontrer à l'aide du critère de d'Alembert que pour tout  $z$  complexe, si  $|z| > 1$  alors  $\sum nz^n$  diverge.
4. En déduire quel est le rayon de convergence.



1. Posons  $u_n(z) = nz^n$ .  
Pour  $z = 0$ , la série converge.

Par ailleurs,  $\forall z \neq 0, |u_n(z)| > 0$ , appliquons lui le critère de d'Alembert.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{|z|(n+1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|$$

Donc  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ ,  $\sum nz^n$  converge absolument donc converge.

2. On en déduit donc  $R \geq 1$ .
3. A l'inverse si  $|z| > 1$ , ce même critère de d'Alembert nous donne que  $\sum nz^n$  diverge.
4. On en déduit donc que  $R \leq 1$ . Donc  $R = 1$ .

##### ► Exercice 2. $\star$ Le classique sans d'Alembert décortiqué

On considère la série  $\sum \sin(n)z^n$ .

1. Démontrer à l'aide d'un théorème de comparaison que pour tout  $z$  complexe, si  $|z| < 1$  alors  $\sum \sin(n)z^n$  converge. Que pouvez-vous en déduire sur le rayon de convergence.
2. Démontrer que  $\sum \sin(n)$  diverge. Conclure sur le rayon de convergence de  $\sum \sin(n)z^n$ .



1.  $\forall z \in \mathbb{C}, 0 \leq |\sin(n)z^n| \leq |z^n|$ . Donc  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ ,  $\sum |z^n|$  converge donc  $\sum \sin(n)z^n$  converge absolument par comparaison. Donc  $R \geq 1$ .
2. Par ailleurs en  $z = 1$ ,  $\sum \sin(n)1^n = \sum \sin(n)$  diverge car  $\sin(n)$  ne tend pas vers 0. Donc  $R \leq 1$  et au final  $R = 1$ .



► **Exercice 3. ★ ★ Le classique 1**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1.  $\sum_{n \geq 0} \ln(1+n) z^n$

3.  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

5.  $\sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n$

2.  $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} z^{2n}$

4.  $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n$

6.  $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$



1. 1.  
2.  $\sqrt{2}$ .  
3. 3.  
4. 1/4  
5.  $+\infty$ .  
6. 1.  
7. 27.

**Rédaction complète du 4**

Posons  $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^n = \frac{(2n)! z^n}{(n!)^2}$ .

Pour  $z = 0$ , la série converge.

Par ailleurs,  $\forall z \neq 0, |u_n(z)| > 0$ , appliquons lui le critère de d'Alembert.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{|z|(2(n+1))!(n!)^2}{2n!((n+1)!)^2} = \frac{|z|(2n+2)!(n!)^2}{2n!((n+1)!)^2} = \frac{|z|(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4|z|$$

Donc  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \frac{1}{4}$ ,  $\sum \binom{2n}{n} z^n$  converge absolument donc converge donc  $R \geq \frac{1}{4}$ .

A l'inverse si  $|z| > \frac{1}{4}$ ,  $\sum \binom{2n}{n} z^n$  diverge donc  $R \leq \frac{1}{4}$ .

Donc  $R = \frac{1}{4}$ .

**Rédaction complète du 2**

Posons  $u_n(z) = 2^{-n} z^{2n}$ .

Pour  $z = 0$ , la série converge.

Par ailleurs,  $\forall z \neq 0, |u_n(z)| > 0$ , appliquons lui le critère de d'Alembert.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{2^{-n-1} |z|^{2n+2}}{2^{-n} |z|^{2n}} = \frac{|z|^2}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^2}{2}$$

Donc  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \sqrt{2}$ ,  $\sum 2^{-n} z^{2n}$  converge absolument donc converge donc  $R \geq \sqrt{2}$ .

A l'inverse si  $|z| > \sqrt{2}$ ,  $\sum 2^{-n} z^{2n}$  diverge donc  $R \leq \sqrt{2}$ .

Donc  $R = \sqrt{2}$ .



► **Exercice 4. ★ ★ Le classique 2**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

a)  $\sum_{n \geq 0} z^{n^2}$     b)  $\sum_{n \geq 0} \cos\left(\frac{1}{n}\right) z^n$     c)  $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$     d)  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$



1. 1.

2. 1.
3. 1.
4. 1.
5. 1.

**Rédaction complète du 2**

$\forall z \in \mathbb{C}, 0 \leq |\cos\left(\frac{1}{n}\right)z^n| \leq |z^n|$ . Donc  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ ,  $\sum |z^n|$  converge donc  $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)z^n$  converge absolument par comparaison. Donc  $R \geq 1$ .

Par ailleurs en  $z = 1$ ,  $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)1^n = \sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$  diverge car  $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$  ne tend pas vers 0. Donc  $R \leq 1$  et au final  $R = 1$ .

**Bonus : Et sur le cercle de convergence ?**

Sur ce cercle  $z = e^{i\theta}$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$  car le module est de 1.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $\cos\left(\frac{1}{n}\right)e^{in\theta}$  n'a pas de limite car  $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et  $e^{in\theta}$  ne tend pas vers 0 (soit il n'a pas de limite, soit il est égal à 1 pour  $\theta = 0$ ). Donc  $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)e^{in\theta}$  diverge.



**► Exercice 5. ★ ★ Avec  $a_n$  à déterminer**

Soit  $r > 0$ . On cherche à déterminer le rayon de  $\sum a_n z^n$  où la suite  $(a_n)$  est définie par  $a_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = r a_n$$

1. Déterminer l'expression des  $a_n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .
2. En déduire le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$ .
3. Démontrer que pour tout  $b > 0$ , il existe  $r$  tel que le rayon de cette série vale  $b$ .



1.  $(a_n)$  est une suite géométrique de raison  $r$ . On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = r^n a_0$ . Comme  $a_0 = 1$  alors  $a_n = r^n$ .
2. On déduit de la question 1 que  $\sum a_n z^n = \sum r^n z^n = \sum (rz)^n$ . C'est une série géométrique de raison  $rz$ . Elle converge donc si et seulement si  $|rz| < 1$ . Ceci est équivalent à  $|z| < \frac{1}{r}$ . Le rayon de convergence est donc  $\frac{1}{r}$ .
3. Soit  $b > 0$ , on sait que le rayon vaut  $\frac{1}{r}$ . Pour que  $\frac{1}{r}$  soit égal à  $b$ , il faut donc choisir  $r = \frac{1}{b}$ . Cette question assure qu'on peut construire une série entière de n'importe quel rayon en choisissant  $r$  judicieusement.



**► Exercice 6. ★ ★ ★ Un cas compliqué d'application de d'Alembert**

Considérons la suite  $(a_n)$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{n^n}{n!}$ .

1. Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . En déduire la limite de  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ .
2. Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n z^{3n}$ .



1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} \quad \text{car } (n+1)! = (n+1)n! \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e^{\ln((1+\frac{1}{n})^n)} && \text{en prenant l'exponentielle du logarithme} \\ &= e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} && \text{par propriété du logarithme} \\ &= e^{n(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} && \text{en effectuant un DL à l'ordre 1 du terme en } \ln. \\ &= e^{1+o(1)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e \end{aligned}$$

2. Posons  $u_n(z) = a_n z^n$ .

Pour  $z = 0$ , la série converge.

Par ailleurs,  $\forall z \neq 0, |u_n(z)| > 0$ , appliquons lui le critère de d'Alembert.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{a_{n+1}|z|^{3n+3}}{a_n|z|^{3n}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}|z|^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e|z|^3$$

d'après la question précédente. Donc  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ ,  $\sum a_n z^n$  converge absolument donc converge. Donc

$$R \geq \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

A l'inverse si  $|z| > \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ ,  $\sum a_n z^n$  diverge donc  $R \leq \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ .

$$\text{Donc } R = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

----- ✂

### ► Exercice 7. ★ ★ ★ Séries entières paramétrées

Déterminer le rayon de convergence des séries entières paramétrées suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} b^{\sqrt{n}} z^n \quad (b > 0) \quad \sum_{n \geq 0} a^{n^2} z^n$$

✂ -----

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*, b^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n} \ln(b)}$ .  
Posons  $u_n(z) = b^{\sqrt{n}} z^n = e^{\sqrt{n} \ln(b)} z^n$ .  
Pour  $z = 0$ , la série converge.

Par ailleurs,  $\forall z \neq 0, |u_n(z)| > 0$ , appliquons lui le critère de d'Alembert.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{e^{\sqrt{n+1} \ln(b)}}{e^{\sqrt{n} \ln(b)}} |z| = e^{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \ln(b)} |z| = e^{\frac{\ln(b)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|$$

On a utilisé dans une égalité l'identité suivante  $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$  pour réécrire  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ .

Donc  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ ,  $\sum b^{\sqrt{n}} z^n$  converge absolument donc converge donc  $R \geq 1$ .

A l'inverse si  $|z| > 1$ ,  $\sum b^{\sqrt{n}} z^n$  diverge donc  $R \leq 1$ .

Donc  $R = 1$ .

• Pour la seconde série, si  $a > 1, R = 0$ , si  $a = 1, R = 1$ , si  $0 < a < 1, R = +\infty$ .

----- ✂

## 1.2 Problèmes

### ► Exercice 8. ★ ★ ★ ★ Un exercice plus théorique

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on veut montrer que les séries entières  $\sum a_n z^n (R_1)$  et  $\sum n^\alpha a_n z^n (R_2)$  ont même rayon de convergence.

1. On commence par supposer que  $\alpha$  est positif.
  - (a) Comparer  $|n^\alpha a_n z^n|$  et  $|a_n z^n|$ . En déduire que  $R_1 \geq R_2$ .
  - (b) Soit  $\rho \in ]0, R_1[$ , écrire  $n^\alpha a_n z^n$  en fonction de  $a_n \rho^n$ .
  - (c) Démontrer qu'à partir d'un certain rang, pour tout  $z$  tel que  $|z| < \rho$ ,

$$|n^\alpha a_n z^n| \leq |a_n \rho^n|.$$

- (d) En déduire que  $R_2 \geq \rho$ .
  - (e) Expliquer alors pourquoi  $R_2 \geq R_1$ .
2. S'inspirer des questions précédentes pour traiter le cas  $\alpha < 0$ .



1. (a)  $\forall n \geq 1, 0 \leq |a_n z^n| \leq |n^\alpha a_n z^n|$  Or si  $|z| < R_2$ ,  $\sum n^\alpha a_n z^n$  converge.  
 Donc par comparaison si  $|z| < R_2$ ,  $\sum a_n z^n$  converge.  
 Donc  $R_1 \geq R_2$ .
- (b) On a  $n^\alpha a_n z^n = a_n \rho^n \times n^\alpha (\frac{z}{\rho})^n$ .
- (c) Par croissances comparées, on sait que si  $|z| < \rho$ ,  $n^\alpha (\frac{z}{\rho})^n$  tend vers 0. Donc à partir d'un certain rang,

$$|n^\alpha (\frac{z}{\rho})^n| \leq 1.$$

Ce qui donne l'égalité demandée.

- (d) On sait que si  $|z| < \rho$ ,

$$0 \leq |n^\alpha a_n z^n| \leq |a_n \rho^n|.$$

Comme  $\rho < R_1$ , alors,  $\sum a_n \rho^n$  converge.

Donc par comparaison  $\sum n^\alpha a_n z^n$  converge absolument donc converge.

Donc  $R_2 \geq \rho$ .

- (e) Ceci est vrai pour tout  $\rho < R_1$ . Donc  $R_2 \geq R_1$ .



## 2 AAV : Calculer la somme d'une série entière

### 2.1 Travail sur quelques savoir-faire spécifiques

#### ► Exercice 9.

##### Savoir faire :

Savoir effectuer un changement d'indices

Dans les sommes suivantes, effectuer le changement d'indices indiqué.

1.  $\sum_{n=1}^N a_{n-1}, p = n - 1.$

2.  $\sum_{n=1}^N n x^{n-1}, p = n - 1.$

3.  $\sum_{n=0}^N x^{n+2}, p = n + 2.$

#### ► Exercice 10.

**Savoir faire :**

Comprendre que la variable de sommation est muette

1. Développer et comparer les deux sommes suivantes  $\sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1}$  et  $\sum_{p=0}^N \frac{1}{p+1}$ .
2. Démontrer que  $\sum_{n=1}^N \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n+1}$  après avoir fait le changement d'indices  $p = n - 1$ .

► **Exercice 11.****Savoir faire :**

Savoir mettre le terme général de la série sous la forme  $(f(x))^n$  ou  $(f(x))^n/n!$

Mettre sous la forme  $C \sum (f(x))^n$  ou  $C \sum \frac{(f(x))^n}{n!}$  les sommes suivantes où  $C \in \mathbb{R}$  peut dépendre de  $x$ .

$$\sum (-1)^n x^n, \quad \sum (-1)^n x^{2n}, \quad \sum \frac{3^n x^{2n+1}}{n! 2^n}, \quad \sum \frac{e^n 4^{-n}}{n!}$$

**2.2 Exos de l'aav**► **Exercice 12. ★ : Un classique décortiqué**

On souhaite calculer la série entière  $\sum_{n \geq 0} n x^n$

1. Rappeler quel est le rayon et la valeur de  $\sum_{n \geq 0} x^n$ .
2. Exprimer  $\sum_{n \geq 0} n x^n$  en fonction de  $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$ .
3. Exprimer  $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$  en fonction de la dérivée de  $\sum_{n \geq 0} x^n$  sur un intervalle qu'on précisera.
4. Dédurre de toutes ces questions, la valeur de  $\sum_{n \geq 0} n x^n$ .



1. C'est la série géométrique de rayon 1.
2. Commencez par remarquer que le rayon de cette série est 1 (en exo).

$$\begin{aligned} \forall |x| < 1, \quad \sum_{n \geq 0} n x^n &= \sum_{n \geq 1} n x^n && \text{car le premier terme est nul} \\ &= \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} x \\ &= x \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} && x \text{ ne dépendant pas de } n \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \forall |x| < 1, \quad \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} &= \sum_{n \geq 1} (x^n)' \\ &= \left( \sum_{n \geq 0} x^n \right)' && \text{par théorème de dérivation des séries entières} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \forall |x| < 1, \quad \sum_{n \geq 0} nx^n &= x \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} && \text{d'après la question 2} \\
 &= \left( \sum_{n \geq 0} x^n \right)' && \text{d'après la question 3} \\
 &= \left( \frac{1}{1-x} \right)' && \text{d'après la question 1} \\
 &= \frac{1}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

..... ✂

► **Exercice 13. ★ : Un classique décortiqué**

On définit la fonction cosh par  $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Déterminer la valeur de la somme  $\sum_{n \geq 0} \cosh(n)x^n$ .

Pour cela vous utiliserez la définition ci-dessus et vous ramènerez à une somme de deux séries géométriques.

✂

.....

S'inspirer de la 3ème série de l'exo 11.

..... ✂

► **Exercice 14. ★★ : Un classique**

On définit la fonction sinh par  $\forall x \in \mathbb{R}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Déterminer, pour chacune des séries suivantes, son domaine de convergence et sa somme pour  $x$  réel.

$$1. \sum_{n \geq 0} \frac{nx^n}{n!} \quad 2. \sum_{n \geq 0} \sinh(na)x^n, (a > 0) \quad 3. u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!} \quad 4. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!} x^n$$

✂

.....

**Indices :** Pour les rayons de convergence, il n'y a rien de bien nouveau, entraînez vous ! Pour calculer la somme (la limite de la série), à chaque fois l'idée est de se ramener séries dont on connaît la valeur (jusqu'ici vous en connaissez deux).

1. Quelle est la dérivée de la série géométrique ? On trouve  $\frac{x}{(1-x)^2}$ .
2. Décomposer en 3 morceaux si c'est légal et calculer chaque morceau. On trouve  $(x+1)^2 e^x$ .
3.  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . On trouve  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-xe^a} - \frac{1}{1-xe^{-a}} \right)$ .
4. Pour l'instant vous ne pouvez pas la faire.

**Correction**

1. Grâce au critère de d'Alembert, montrez que cette série est de rayon infini.

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{nx^n}{n!} &= \sum_{n \geq 1} \frac{nx^n}{n!} && \text{car le premier terme est nul} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{(n-1)!} && \text{car } n! = n(n-1)! \\
 &= x \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} && \text{car } x \text{ ne dépend pas de } n \\
 &= x \sum_{n \geq 1} \left( \frac{x^n}{n(n-1)!} \right)' && \\
 &= x \sum_{n \geq 1} \left( \frac{x^n}{n!} \right)' && \text{car } n! = n(n-1)! \\
 &= x \left( \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right)' && \text{par théorème de dérivation des séries entières} \\
 &= x (e^x)' && \text{par définition de la série exponentielle} \\
 &= x e^x
 \end{aligned}$$

2. Pour tout  $x$  dans son domaine de convergence,

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \sinh(na)x^n &= \sum_{n \geq 0} \frac{e^{na} - e^{-na}}{2} x^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (e^{na} x^n - e^{-na} x^n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} ((e^a x)^n - (e^{-a} x)^n)\end{aligned}$$

La série  $\sum_{n \geq 0} ((e^a x)^n)$  est géométrique qui converge si et seulement si  $|e^a x| < 1$ . Son rayon est donc  $e^{-a}$ .

De même  $\sum_{n \geq 0} ((e^{-a} x)^n)$  est de rayon  $e^a$ .

Comme  $a > 0, e^a > e^{-a}$ . Donc la somme des deux séries entières est de rayon le minimum de  $e^a$  et  $e^{-a}$  (puisque les deux rayons sont différents) cad  $e^{-a}$ .

Donc

$$\begin{aligned}\forall |x| < e^{-a}, \quad \sum_{n \geq 0} \sinh(na)x^n &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (e^a x)^n - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (e^{-a} x)^n \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - xe^a} - \frac{1}{1 - xe^{-a}} \right) \quad \text{d'après l'expression de la série géométrique}\end{aligned}$$

3. Pour tout  $x$  dans son domaine de convergence.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!} &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} && \text{car } x \text{ ne dépend pas de } n \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^n}{2^n n!} \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{x^2}{2})^n}{n!} && \text{en regroupant les puissances} \\ &= xe^{-\frac{x^2}{2}} && \text{car c'est une série exponentielle pour } z = -\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

On a donc l'expression et par la même occasion le domaine de convergence qui est  $\mathbb{R}$  (rayon infini).

4.

----- ✂

### ► Exercice 15. ★ ★ : Un classique

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme pour  $x \in \mathbb{R}$  des séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n.$$

✂

Indices :

Et si vous écriviez  $\cos(n\theta)$  sous la forme d'un complexe? On trouve  $e^{x \cos(\theta)} \cos(x \sin(\theta))$  pour la première et  $e^{x \cos(\theta)} \sin(x \sin(\theta))$  pour la seconde.

Correction :

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Déterminons le rayon de convergence de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n$  :

Puisque  $|\cos|$  est majoré par 1,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \left| \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n \right| \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

Or  $\forall x \in \mathbb{R}, \sum \frac{|x|^n}{n!}$  converge (série exponentielle de rayon infinie).



Donc par comparaison,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n$  CVA sur  $\mathbb{R}$  donc son rayon est infini. Même raisonnement pour la série en sinus.

L'idée est de faire apparaître une série de type exponentielle. En cela le cos nous gêne. On sait que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta})$  et  $\sin(n\theta) = \operatorname{Im}(e^{in\theta})$ .

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(e^{in\theta})}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{in\theta}}{n!} x^n \right) && \text{par linéarité de la partie réelle} \\ &= \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} x^n \right) && \text{par linéarité et continuité de la partie réelle} \end{aligned}$$

De même

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n = \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} x^n \right)$$

Calculons donc  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} x^n$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{i\theta})^n}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xe^{i\theta})^n}{n!} \\ &= e^{xe^{i\theta}} && \text{il s'agit de la série exponentielle pour } z = xe^{i\theta} \end{aligned}$$

Ne reste qu'à trouver les parties réelles et imaginaires de  $e^{xe^{i\theta}}$  :

$$\begin{aligned} e^{xe^{i\theta}} &= e^{x(\cos(\theta) + i \sin(\theta))} && \text{par définition de } e^{i\theta} \\ &= e^{x \cos(\theta)} e^{ix \sin(\theta)} \\ &= e^{x \cos(\theta)} (\cos(x \sin(\theta)) + i \sin(x \sin(\theta))) && \text{par définition de } e^{i \sin(\theta)} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n = e^{x \cos(\theta)} \sin(x \sin(\theta))$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n = e^{x \cos(\theta)} \cos(x \sin(\theta))$$

----- ✂

### ► Exercice 16. ★ ★ L'utilité de la division euclidienne

1. Effectuez la division euclidienne de  $3X$  par  $X + 1$ .
2. Déterminer le rayon de convergence de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+1} x^n$  puis calculer sa somme.

✂ -----

1. On a  $3X = 3(X + 1) - 3$ .
2. Je laisse le rayon en exo, il s'agit d'utiliser le critère de d'Alembert : vous trouvez  $R = 1$ .

D'après la question 1,

$$\forall |x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3(n+1) - 3}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( 3x^n - \frac{3}{n+1} x^n \right)$$

$$\text{Or } \forall |x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} 3x^n = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{3}{1-x}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
 \forall |x| < 1, x \neq 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n+1} x^n &= \frac{3}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
 &= \frac{3}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt \\
 &= \frac{3}{x} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt \quad \text{Par théorème d'intégration des séries entières} \\
 &= \frac{3}{x} \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \quad (\text{série géométrique}) \\
 &= -\frac{3 \ln(1-x)}{x}
 \end{aligned}$$

On en déduit finalement que

$$\forall |x| < 1, x \neq 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+1} x^n = \frac{3}{1-x} + \frac{3 \ln(1-x)}{x}$$

----- ✂

► **Exercice 17. ★ ★ ★ Ecrire l'exponentielle comme une série**

1. Résoudre le problème de Cauchy suivant et dire combien il a de solutions :

$$\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

2. On considère  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Quel est le domaine de convergence de la série associée ?
3. Démontrer que  $S$  est solution du problème de Cauchy de la question 1. Qu'en concluez-vous ?

✂ -----

Voici des éléments de corrigé et pas un corrigé complet :

1.  $t \mapsto e^t$  est l'unique solution de ce problème.
2. Appliquez le critère de d'Alembert en valeur absolue : le domaine est  $\mathbb{R}$ . (je vous le laisse, il y a des corrections pour le rayon avant).
3. D'après le théorème de dérivation des séries entières,

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{car } n! = n(n-1)! \\
 &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} \quad \text{en posant } p = n-1 \\
 &= S(x)
 \end{aligned}$$

$$\text{Par ailleurs } S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = \frac{0^0}{0!} = 1.$$

Donc  $S$  est solution du problème de Cauchy dont l'unique solution est l'exponentielle. Ceci prouve que  $S$  est l'exponentielle.

----- ✂

► **Exercice 18. ★ ★ ★ Passer par une équation différentielle**

On considère la fonction  $S : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ .

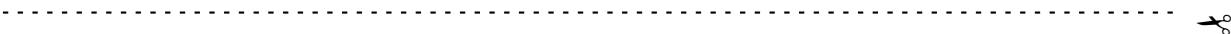
1. Quel est le domaine de convergence de cette série ?

2. Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, S''(x) + S'(x) + S(x) = e^x$ . Calculer  $S(0)$ .

3. En déduire la valeur de  $S$ .



.....  
Dérivez plusieurs fois et formez une équation différentielle d'ordre 2 que vérifie la série. On trouve que  $S(x) = (C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))e^{-\frac{x}{2}} + \frac{e^x}{3}$ . Reste à trouver les constantes en calculant  $S(0)$  et  $S'(0)$ .



## 2.3 Problèmes

### ► Exercice 19. ★ ★ ★ ★ Probabilités et séries entières

Une agence de publicité téléphone à ses clients pour lui vendre un produit. Lorsqu'elle téléphone à un client, la probabilité qu'elle arrive à le joindre est  $0 < p < 1$ , qu'elle n'y arrive pas  $1 - p$ .

Soit  $X$  une variable qui compte le nombre d'appels nécessaires pour joindre la personne.

1. Expliquez pourquoi  $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .
2. Démontrons que la somme des probabilités vaut bien 1 c'est-à-dire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1.$$

3. On cherche le nombre de moyens d'essais avant de réussir à contacter la personne. Celui-ci est donné par l'espérance de  $X$  donné par

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k).$$

Calculer cette espérance. On pourra déterminer au préalable la valeur de  $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$  pour  $x$  dans un certain intervalle.

4. On cherche à mesurer maintenant la moyenne de l'écart par rapport à la moyenne donné par la variance

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k - E(X))^2 P(X = k).$$

Calculer la variance. On pourra déterminer au préalable la valeur de  $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$  pour  $x$  dans un certain intervalle.

## 3 AAV Développer une fonction en série entière

### 3.1 Travail sur quelques savoir-faire spécifiques

#### ► Exercice 20.

##### Savoir faire :

Savoir obtenir un DSE à l'aide de techniques calculatoires (éltés simples, factorisation, somme de DSE)

Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$  et  $g : x \mapsto \ln(1+x)$ .

1. Ecrire  $\frac{1}{5x-6}$  en fonction de  $f$ . Vous préciserez l'ensemble de définition de votre égalité.

2. A l'aide d'une décomposition en éléments simples, exprimer  $\frac{1}{(3x-4)(x-5)}$  en fonction de  $f$ . Vous préciserez l'ensemble de définition de votre égalité.
3. Ecrire  $\ln(x-12)$  en fonction de  $g$ . Vous préciserez l'ensemble de définition de votre égalité.
4. Ecrire  $\ln(x^2-7x+12)$  en fonction de  $g$  (vous pourrez factoriser le trinôme pour commencer). Vous préciserez l'ensemble de définition de votre égalité.

## 3.2 Exos de l'aav

### ► Exercice 21. ★ : Variations de DSE usuels

Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions de la variable réelle suivantes et préciser l'intervalle de validité du développement :

$$1. f(x) = \frac{1}{2x-1} \quad 2. g(x) = \ln(1+4x) \quad 3. h(x) = \cos(x^2) \quad 4. k(x) = \sin(3x).$$



$$1. \forall x \neq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2x-1} = -\frac{1}{1-2x}.$$

On sait que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Donc si  $|x| < \frac{1}{2}$  (c'est-à-dire  $|2x| < 1$ ),

$$\frac{1}{2x-1} = -\frac{1}{1-2x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n.$$

Notez que la fonction bien que définie partout sauf en  $\frac{1}{2}$ , n'est égal à son DSE en 0 que si  $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

2.

$$3. \text{ On sait que } \forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, \cos(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}.$$

4.



### ► Exercice 22. ★★ : DSE plus futés mais guidés

Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions de la variable réelle suivantes et préciser l'intervalle de validité du développement :

1.  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$  en faisant une décomposition en éléments simples. Vous déterminerez alors le développement de chaque terme de la décomposition puis vous summerez ces deux décompositions.
2.  $g(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$  : vous ferez d'abord le développement en série entière de la fonction  $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$  puis vous utiliserez le théorème d'intégration des séries entières.



1.  $\forall x \notin \{1, -2\}, \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)} = -\frac{1}{3(1-x)} - \frac{1}{6(1-(-\frac{x}{2}))}$ . La dernière égalité a pour objectif de faire apparaître une variation de la fonction  $\frac{1}{1-x}$  qu'on sait développer en série entière. En effet,

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Donc

$$\forall x \in ]-2, 2[, \quad \frac{1}{1 - (-\frac{x}{2})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n.$$

La somme de ces deux séries est de rayon le minimum de 1 et 2. Donc

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{(x-1)(x+2)} &= -\frac{1}{3(1-x)} - \frac{1}{6(1-(-\frac{x}{2}))} && \text{l'intervalle étant dû au rayon de convergence de la série.} \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n. \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) && \text{en factorisant par } -1/3. \end{aligned}$$

2. Une correction détaillée d'un exemple analogue est disponible dans l'exo 19.

----- ✂

### ► Exercice 23. ★★ : DSE plus futés

Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions de la variable réelle suivantes et calculer le rayon de convergence de la série :

$$1. f(x) = \frac{1}{(2x-1)(-x+2)} \quad 2. g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad 3. f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6).$$

✂ -----

L'idée de cet exercice est de TOUJOURS se ramener aux développements en série entière des fonctions usuelles.

#### Indices

1. Décomposer en éléments simples.
2. Connaissez-vous le DSE de  $\sin$  ?
3. Factoriser le polynôme et découper la  $\ln$ .

#### Corrections :

1. Suivez la même méthode que la correction de l'exo 18.
- 2.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{\sin(t)}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Par théorème d'intégration des séries entières, on ne change pas le rayon de convergence et on peut intervertir intégrale et série donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} dt.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

3. On a  $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ . Ceci est strictement positif sur  $] -\infty, 2[ \cup ]3, +\infty[$ . Comme on va faire un DSE en 0 on se place sur  $] -\infty, 2[$ . On a

$$\forall x \in ] -\infty, 2[, f(x) = \ln((2-x)(3-x)) = \ln(6(1-\frac{x}{2})(1-\frac{x}{3})) = \ln(6) + \ln(1-\frac{x}{2}) + \ln(1-\frac{x}{3}).$$

On connaît le DSE de  $\ln(1-x)$  qui est valable sur  $] -1, 1[$ . Donc

$$\forall x \in ] -2, 2[ \left( \left| \frac{x}{2} \right| < 1 \right), \quad \ln(1-\frac{x}{2}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{x}{2})^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n}$$

et

$$\forall x \in ]-3, 3[ (|\frac{x}{3}| < 1), \quad \ln(1 - \frac{x}{3}) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{x}{3})^n}{n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n n}$$

La somme de ces deux séries entières est de rayon 2 (le minimum de 2 et 3). Donc

$$\forall x \in ]-2, 2[, \quad f(x) = \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) \frac{x^n}{n}.$$

----- ✂

► **Exercice 24. ★ ★ ★ Les lapins de Fibonacci.**

L'objectif est de trouver une façon alternative de calculer la suite de Fibonacci donnée par  $F_0 = 0, F_1 = 1$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Pour cela, on considère la série entière  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$ .

1. Multiplier la relation  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  par  $x^{n+2}$  et summez-la entre 0 et  $+\infty$ . En déduire que  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ .
2. Développer  $f$  en série entière et précisez l'intervalle d'existence de ce développement.
3. En déduire l'expression de  $F_n$  pour tout  $n$  entier naturel.

✂ -----

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

Donc pour tout  $x$  dans le domaine de convergence de la série entière :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+1} + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n \\ &= x \sum_{p=1}^{+\infty} F_p x^p + x^2 f(x) && \text{en posant } p = n+1 \text{ dans la première série.} \\ &= x \left( \sum_{p=0}^{+\infty} F_p x^p - F_0 \right) + x^2 f(x) && \text{le premier terme de la série valant } F_0 \\ &= x f(x) + x^2 f(x) && \text{puisque } F_0 = 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2} &= \sum_{n=2}^{+\infty} F_p x^p && \text{en posant } p = n+2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_p x^p - F_0 - F_1 x \\ &= f(x) - x \end{aligned}$$

Donc  $f(x) - 1 - x = x(f(x) - 1) + x^2 f(x)$ .

Donc  $f(x)(1 - x - x^2) = x$  ce qui donne l'égalité demandée.

2. Les racines de  $1 - x - x^2$  sont  $r_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

On peut décomposer en éléments simples

$$\frac{x}{1-x-x^2} = -\frac{r_+}{\sqrt{5}(x-r_+)} + \frac{r_-}{\sqrt{5}(x-r_-)} = \frac{1}{\sqrt{5}(1-\frac{x}{r_+})} - \frac{1}{\sqrt{5}(1-\frac{x}{r_-})}.$$

On développe en série entière :

$$\forall |x| < r_+, \frac{1}{\sqrt{5}(1-\frac{x}{r_+})} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{x}{r_+})^n.$$

$$\forall |x| < r_-, \frac{1}{\sqrt{5}(1 - \frac{x}{r_-})} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{r_-}\right)^n.$$

Donc en sommant (le rayon de la somme est le min soit  $r_-$ )

$$\forall |x| < r_-, \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left( \left(\frac{1}{r_+}\right)^n - \left(\frac{1}{r_-}\right)^n \right).$$

Donc par unicité du DSE,  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(\frac{1}{r_+}\right)^n - \left(\frac{1}{r_-}\right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( (-r_-)^n - (-r_+)^n \right).$



### 3.3 Problèmes

► **Exercice 25. ★ ★ ★ Exponentielle de matrice : des séries entières de matrices aux systèmes différentielles**

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de l'exponentielle vue comme série entière. En particulier, on rencontre dans ce problème la notion d'exponentielle matricielle. On rappelle que sur un

certain domaine de convergence  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on admet qu'on peut définir l'objet suivant appelé exponentielle matricielle

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

- (a) Pour  $n = 2$ ,  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , calculer  $e^{tD}$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .
- (b) Déterminez les solutions du système différentiel

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = D \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

et exprimez-les en fonction de  $e^{tD}$ .

- (c) Calculer  $e^{tR}$  pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$
- (d) Diagonaliser la matrice  $R$ .
- (e) En déduire la forme des solutions de

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = R \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

et exprimez les en fonction de  $e^{tR}$ .

3. Démontrez que si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  alors  $e^\lambda$  est valeur propre de  $e^A$
4. En déduire si le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé à racines simples réelles alors  $e^A$  est diagonalisable à valeurs propres réelles.



1.



## 4 Trouver une solution DSE d'une équation différentielle

### 4.1 Travail sur quelques savoir-faire spécifiques

#### ► Exercice 26.

##### Savoir faire :

Savoir deviner l'expression d'une suite définie par une relation de récurrence

Déterminer l'expression de  $a_n$  par tâtonnement en fonction de ses premiers termes quand

1.  $a_{n+1} = 2a_n$  (vous exprimerez  $a_n$  en fonction de  $a_0$ ).
2.  $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$  (vous exprimerez  $a_n$  en fonction de  $a_0$ ).
3.  $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$  (vous exprimerez  $a_n$  en fonction de  $a_1$ ).
4.  $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_{n-1}$ . Séparez entre pairs et impairs. Essayez de faire au maximum apparaître des factorielles et des puissances. (Vous exprimerez  $a_n$  en fonction de  $a_0$  pour les pairs,  $a_1$  pour les impairs).

### 4.2 Exos de l'aav

#### ► Exercice 27. ★ ★ Le classique décortiqué

On cherche à trouver des solutions développables en série entière de l'équation différentielle  $x^2 f' - f = -x^2$ .

1. **Analyse :** On se donne  $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et on cherche les  $a_n$  tels que  $y$  soit solution de l'équation.  
(a) Démontrer que si  $y$  est solution alors

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad -a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n-1)a_{n-1} - a_n)x^n = -x^2.$$

- (b) En déduire les relations suivantes sur les coefficients :  $a_0 = 0 = a_1$ ,  $a_2 = 1$  et

$$\forall n \geq 3, a_n = (n-1)a_{n-1}$$

- (c) Démontrer alors par récurrence sur  $n$  que

$$\forall n \geq 2, a_n = (n-1)!$$

2. **Synthèse :** On considère maintenant la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)!x^n$$

et on veut déterminer son intervalle d'existence.

- (a) Déterminer son rayon de convergence.
- (b) En déduire l'intervalle d'existence d'une solution développable en série entière.



1. (a) On cherche  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  une solution sous la forme d'une série entière de rayon  $R$ . On peut dériver cette série entière sur  $] -R, R[$  (théorème de dérivation des séries entières) et la première dérivée est

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$



On injecte dans l'équation différentielle : les calculs suivants sont posés pour  $x$  dans  $] - R, R[$ .

$$x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -x^2.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -x^2.$$

La première somme peut partir de 0 car le terme pour  $n = 0$  est nul

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -x^2.$$

On effectue un changement d'indice sur la première somme ( $p = n + 1$ ) pour obtenir partout  $x^n$  :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (p-1) a_{p-1} x^p - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -x^2.$$

Les variables de sommation étant muette :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -x^2.$$

On sort le premier terme de la seconde somme :

$$-a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = -x^2.$$

On regroupe les deux sommes (convergentes absolument toutes les deux sur  $] - R, R[$ ).

$$-a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n-1) a_{n-1} - a_n) x^n = -x^2.$$

(b) Par unicité du développement en série entière, on a

$$\forall n \geq 3, \quad (n-1) a_{n-1} - a_n = 0.$$

On a aussi  $a_0 = 0$ ,  $(1-1) a_0 - a_1 = 0$  et  $(2-1) a_1 - a_2 = -1$  ( $n = 0, 1, 2$ ). Ceci donne ce qui est demandé.

(c) Initialisation pour  $n = 2$  :  $a_2 = 1 = (2-1)!$ .

Supposons que pour  $n$  fixé supérieur ou égal à 2, on ait  $a_n = (n-1)!$ .

On veut montrer que  $a_{n+1} = n!$ .

Or

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= n a_n \\ &= n(n-1)! \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= n! \end{aligned}$$

On a donc montré par récurrence que

$$\forall n \geq 2, a_n = (n-1)!$$

2. (a) Par le critère de d'Alembert, on peut montrer que son rayon est 0 (je vous le laisse en exo).
- (b) On trouve qu'une solution DSE devrait s'écrire

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)! x^n.$$

Mais cette série est rayon nul. Donc il n'existe pas de telles solutions.

----- ✂

► **Exercice 28. ★ ★ Le classique**

1. Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle  $(1+x^2)f'' - 2f = 0$ . Calculer leur rayon de convergence et expliciter leur somme.
2. Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle suivante :

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$



1. On trouve  $a_0 + a_1x + a_0x^2 + a_1 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}x^{2p+1}}{4p^2-1}$  valable sur  $[-1, 1]$ .

2. On cherche  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  une solution sous la forme d'une série entière de rayon  $R$ .

On peut dériver cette série entière sur  $] -R, R[$  (théorème de dérivation des séries entières) et les deux premières dérivées sont

$$\forall x \in ] -R, R[, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On injecte dans l'équation :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

On effectue les changements d'indice pour obtenir partout  $x^n$  :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

On ajoute les premiers termes (qui sont tous nuls !) pour avoir le même indexation des séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-(n+1) n a_{n+1} + (n+1)^2 a_n) x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on a

$$\forall n \geq 0, \quad n a_{n+1} = (n+1) a_n.$$

On en conclut que  $a_0 = 0$  par récurrence immédiate que

$$\forall n \geq 1, a_n = n a_1.$$

Donc  $y(x) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ .

Réciproquement c'est une solution : on l'a construite pour ! Par le critère de d'Alembert, on peut montrer que son rayon est 1. On a donc des solutions développables en séries entières uniquement sur  $] -1, 1[$  sauf si  $a_1 = 0$  (on retrouve la solution nulle sur  $\mathbb{R}$ ).

On peut calculer la somme :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad y(x) = a_1 x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = a_1 x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)' = a_1 x \left( \frac{1}{1-x} \right)' = a_1 \frac{x}{(1-x)^2}.$$



► **Exercice 29. ★ ★ ★ Plus dur** Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2xy' + 2y = 0.$$

Parmi les solutions obtenues, trouver celles qui sont paires, et exprimer le résultat à l'aide de fonctions usuelles.



On cherche  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  une solution sous la forme d'une série entière de rayon  $R$ .

On peut dériver cette série entière sur  $] - R, R[$  (théorème de dérivation des séries entières) et les deux premières dérivées sont

$$\forall x \in ] - R, R[, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On injecte dans l'équation :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

On entre le  $x$  de la seconde somme :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

On effectue le changement d'indice  $p = n - 2$  dans la première somme pour obtenir partout  $x^n$  :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (p+2)(p+1) a_{p+2} x^p + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

On ajoute le terme en  $n = 0$  à la seconde somme puisqu'il est nul et on appelle  $n$  la variable de la première somme (variable muette) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} + 2(n+1) a_n) x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on a

$$\forall n \geq 0, \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} + 2(n+1) a_n = 0.$$

Donc

$$\forall n \geq 0, \quad a_{n+2} = -\frac{2}{n+2} a_n.$$

On peut montrer par récurrence que

$$\forall p \geq 1, a_{2p} = \frac{(-1)^p 2^p}{(2p)(2p-2) \dots 2} a_0$$

et que

$$\forall p \geq 1, a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p}{(2p+1)(2p-1) \dots 1} a_1$$

Améliorons ces expressions,

$$\forall p \geq 1, a_{2p} = \frac{(-1)^p 2^p}{(2p)(2p-2) \dots 2} a_0 = \frac{(-1)^p 2^p}{2^p p!} a_0 = \frac{(-1)^p}{p!} a_0$$

$$\forall p \geq 1, a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p (2p(2p-2) \dots 2)}{(2p+1)!} a_1 = \frac{(-1)^p 2^{2p} p!}{(2p+1)!} a_1$$

Donc  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  avec les  $a_n$  définis ci-dessus.

Réciproquement c'est une solution : on l'a construite pour ! Par le critère de d'Alembert (exo pour vous !), on peut montrer que la série des termes pairs et la série des termes impairs sont de rayon  $+\infty$ .

**Solutions paires :** Si  $y$  est paire alors  $\forall x \in \mathbb{R}, y(-x) = y(x)$ . Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par unicité du DSE,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n (-1)^n = a_n$$

Donc quand  $n$  est impair, ceci donne  $a_n = 0$ . Ainsi les solutions paires correspondent au cas où ne reste que des termes pairs :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) &= \sum_{n=0, n \text{ pair}}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} && \text{changement d'indice } n = 2p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} a_0 x^{2p} \\ &= a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^p}{p!} \\ &= a_0 e^{-x^2}. \end{aligned}$$

----- ✂

► **Exercice 30.** ★ ★ ★ **DSE de  $\arcsin(x)^2$ .**

On considère  $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ . On rappelle que  $\forall x \in ]-1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

1. Démontrer que  $(1-x^2)f' = xf + 1$ .
2. Déterminer les solutions DSE de cette équation. Déterminer celle vérifiant  $f(0) = 0$ .
3. On admet que  $f$  est égale à cette série entière. En déduire un DSE de  $\arcsin(x)^2$ .

## 5 Problème

► **Exercice 31.** ★ ★ ★ ★



**e3a 2016 - PC math 2**

----- ✂

Le but de ce problème est de donner, dans les parties I et II, quatre expressions différentes du réel  $\ln(2)$  sous la forme d'une somme de série.

On rappelle que pour une série  $\sum_{k \geq 1} u_k$ , le reste d'indice  $n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  est le réel défini par  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ .

**Partie 1 :**

1. Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur  $] -1, +\infty[$  par  $x \mapsto \ln(1+x)$ .
2. Montrer alors que  $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$ .
3. (a) Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière  $\sum_{k \geq 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ .

- (b) En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$ .

## Partie II.

On considère dans la suite de ce problème, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1 \times 3 \dots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$ . On rappelle la formule de Stirling :  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .  
 (b) Montrer que la série de terme général  $a_n$  est convergente.
2. On considère la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx$ .  
 (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n - I_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{2n+1}$ .  
 (b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{2^n n!} \frac{\pi}{2}$ , puis donner une relation liant  $I_n$  et  $a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. (a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f_n(x) = \frac{\sin^{2n}(x)}{n}$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  vers une fonction  $f$  que l'on déterminera.  
 (b) Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et que  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$ .
4. On note  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$ .  
 (a) En utilisant un changement de variable, montrer que  $J$  est convergente et que  $I = J$ .  
 (b) En calculant  $I + J$ , trouver la valeur de  $I$ .
5. Donner, en le justifiant, la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

## TD : Séries de Fourier

### ► Exercice 32. ★ Exercice prérequis : complexe

Soit  $n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}$ . Que valent les quantités suivantes :

$$\cos(0), \cos(\pi), \cos(n\pi), \sin(n\pi), \cos(2p\frac{\pi}{2}), \sin(2p\frac{\pi}{2}), \cos((2p+1)\frac{\pi}{2}), \sin((2p+1)\frac{\pi}{2}), e^{in0}, e^{in\pi}, e^{in\frac{\pi}{2}}$$

✂

$$\cos(0) = 1, \cos(\pi) = -1, \cos(n\pi) = (-1)^n, \sin(n\pi) = 0, \cos(2p\frac{\pi}{2}) = (-1)^p, \sin(2p\frac{\pi}{2}) = 0, \cos((2p+1)\frac{\pi}{2}) = 0, \sin((2p+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^p,$$

$$e^{in0} = \cos(n0) + i\sin(n0) = 1, e^{in\pi} = (e^{i\pi})^n = (-1)^n$$

$$e^{in\frac{\pi}{2}} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^n = i^n$$

Donc si  $n = 2p$ ,  $e^{in\frac{\pi}{2}} = i^{2p} = (i^2)^p = (-1)^p$  et si  $n = 2p+1$ ,  $e^{in\frac{\pi}{2}} = i^{2p+1} = (i^2)^p i = i(-1)^p$

✂

### ► Exercice 33. ★ Exercice prérequis : Calcul intégral

Soit  $n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}$ . Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt, \quad \int_{-\pi}^{\pi} te^{-int} dt, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)e^{-int} dt.$$

✂

Pour  $n = 0$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi$ .

$$\begin{aligned} \forall n \neq 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt &= \left[ \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{-in\pi}}{-in} - \frac{e^{in\pi}}{-in} \\ &= \frac{-in}{(e^{-i\pi})^n} - \frac{-in}{(e^{i\pi})^n} \\ &= \frac{-in}{(-1)^n} - \frac{-in}{(-1)^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour  $n = 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} te^{-int} dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{car la fonction intégrée est impaire.}$$

$$\begin{aligned} \forall n \neq 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} te^{-int} dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) - it \sin(nt) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt - i \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= -2i \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt && \text{car } t \mapsto t \cos(nt) \text{ est impaire et } t \mapsto t \sin(nt) \text{ est paire.} \\ &= -2i \left[ -\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt && \text{par IPP} \\ &= 2i \frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \left[ \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= 2i \frac{\pi (-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall n \neq 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) e^{-int} dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \cos(nt) - i \cos(t) \sin(nt) dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \cos(nt) dt - i \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \sin(nt) dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= 2 \int_0^{\pi} \cos(t) \cos(nt) dt && \text{car } t \mapsto \cos(t) \cos(nt) \text{ est paire et } t \mapsto \cos(t) \sin(nt) \text{ est impaire} \\
&= 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(t+nt) + \cos(t-nt)) dt && \text{formule trigo} \\
&= \int_0^{\pi} (\cos((n+1)t) + \cos((1-n)t)) dt \\
&= \left[ \frac{\sin((n+1)t)}{n+1} + \frac{\sin((1-n)t)}{1-n} \right]_0^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pour  $n = 1$ , le calcul précédent montre que cette intégrale vaut  $\int_0^{\pi} \cos(2t) + 1 dt = \pi$ .

Cette dernière peut également se calculer par double IPP ou en remplaçant  $\cos$  par la formule d'Euler.



#### Savoir faire :

- Savoir tracer une fonction  $2\pi$ -périodique.
- Savoir calculer des coefficients de Fourier.
- Savoir étudier la convergence du développement en série de Fourier d'une fonction.
- Savoir utiliser les théorèmes de Dirichlet et Parseval pour le calcul de séries numériques.

#### ► Exercice 34. ★

Soient les fonctions périodiques de période  $2\pi$  définies par :

$$K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad (0)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| & -\pi \leq x < \pi \\ g(x) &= x & -\pi \leq x < \pi \end{aligned} \quad (0)$$

1. Tracer les courbes représentant ces fonctions.

2. Calculer leur série de Fourier :

- Pour  $K$ , vous intégrerez par primitivation directe en prenant soin de distinguer les cas  $n = 0$  et  $n \neq 0$ .
- Pour  $g$ , vous effectuerez une intégration par parties en prenant soin de distinguer les cas  $n = 0$  et  $n \neq 0$ .
- Pour  $f$ , vous distinguerez les cas  $n = 0$  et  $n \neq 0$ . Pour  $n \neq 0$ , soit vous vous ramènerez à l'intégrale entre 0 et  $\pi$  en utilisant la parité des fonctions qui sont intégrées puis vous effectuerez une IPP, soit vous couperez votre intégrale entre les  $x > 0$  et les  $x < 0$  pour utiliser la définition de  $|x|$  puis vous effectuerez une IPP sur chaque morceau.

3. Etudier la convergence de ces séries de Fourier.

4. En utilisant le théorème de Dirichlet pour la fonction  $f$  en  $x = 0$  et en admettant que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ,

déterminez la valeur de la série  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$ .

5. En utilisant le théorème de Dirichlet pour la fonction  $g$  en  $x = \pi/2$ , déterminez la valeur de la série  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ . La dernière série donne la formule de Madhava-Gregory-Leibniz évoquée en cours au sujet des approximations de  $\pi$  (mais attention : Madhava de Sangamagrama 1350-1425, J. Gregory 1638-1675, G.W. Leibniz 1646-1716, et J. Fourier 1768-1830)



1.

2. Nous avons  $C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt$  par définition des coefficients de Fourier. Ainsi pour la fonction  $g$ , il suffit de diviser les résultats obtenus à l'exercice 28 par  $2\pi$ . On obtient

$$C_0(g) = 0, C_n(g) = \frac{i(-1)^n}{n} \text{ si } n \neq 0.$$

Passons à  $K$  :

Pour  $n = 0$ ,

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 dt && \text{car la fonction est nulle sur } ]-\pi, 0] \text{ et vaut } 1 \text{ sur } ]0, \pi] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$C_0(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 dt = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \forall n \neq 0, \quad C_n(K) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-int} dt && \text{car la fonction est nulle sur } ]-\pi, 0] \text{ et vaut } 1 \text{ sur } ]0, \pi] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{e^{-in\pi}}{-i2\pi n} - \frac{1}{-i2\pi n} \\ &= \frac{1}{-i2\pi n} ((-1)^n - 1) \\ &= \frac{i}{2n\pi} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

$$C_0(f) = \pi/2$$

$$\begin{aligned} \forall n \neq 0, \quad C_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(nt) dt - i \int_{-\pi}^{\pi} |t| \sin(nt) dt \right) && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |t| \cos(nt) dt && \text{car } t \mapsto |t| \cos(nt) \text{ est paire} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt && \text{car } |t| = t \text{ sur } \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Faites une IPP sur le modèle de l'exo 28 et vous obtenez :  $C_n(f) = \frac{1}{n^2\pi} ((-1)^n - 1)$  si  $n \neq 0$ .

Déterminons maintenant les séries de Fourier :

Comme  $C_n(f) = \frac{1}{n^2\pi} ((-1)^n - 1)$  si  $n \neq 0$  et que

$$C_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2},$$

on a par identification des parties réelles et imaginaires que

$$\forall n \neq 0, a_n = \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1), b_n = 0$$

De même  $C_0(f) = \pi/2 = a_0(f)/2$ .



Donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^N \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx).$$

est la somme partielle de Fourier d'ordre  $N$ .

Comme  $C_0(g) = 0, C_n(g) = \frac{i(-1)^n}{n}$  si  $n \neq 0$  et que

$$C_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2},$$

on a par identification des parties réelles et imaginaires que

$$\forall n \neq 0, b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, a_n = 0$$

De même  $C_0(g) = 0 = a_0(f)/2$ .

Donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N(g) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^N \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

est la somme partielle de Fourier d'ordre  $N$

3. Comme  $f$  est  $C^1$  par morceaux et  $2\pi$ -périodique alors le théorème de Dirichlet nous assure la convergence vers  $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ . Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx)$$

La fonction  $f$  étant continue en tout point de  $\mathbb{R}$ , on a même que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx)$$

Comme  $g$  est  $C^1$  par morceaux et  $2\pi$ -périodique alors le théorème de Dirichlet donne la convergence vers  $\frac{g(x_+) + g(x_-)}{2}$ . Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{g(x_+) + g(x_-)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

4. On choisit  $x = 0$ , ainsi

$$f(0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos(n0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1)$$

Les deux séries étant convergentes (cva car en valeur absolue elles correspondent à  $\sum \frac{1}{n^2}$ ), on peut couper la somme en deux : ainsi

$$0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi} - 2 \frac{\pi}{6}.$$

Donc  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$  et donc  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}$ .

5. On applique en  $x = \pi/2$ , l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{g(x_+) + g(x_-)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

Ainsi

$$\frac{g(\frac{\pi}{2}+) + g(\frac{\pi}{2}-)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(n \frac{\pi}{2})$$

Or  $g$  est continue en  $\frac{\pi}{2}$  donc

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$  est nul pour  $n$  pair donc

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{2p+2}}{2p+1} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc comme  $\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p$  pour  $p \in \mathbb{N}$ .

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

Pour les sommes : dans l'ordre  $\pi/4, \pi^2/6, \pi^2/12$ .



► **Exercice 35.** ★

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique égale à  $x^2$  pour  $-\pi \leq x < \pi$ .

1. Tracer les courbes représentant ces fonctions.
2. Déterminer sa série de Fourier et donner la somme de la série pour toute valeur de  $x$  réel.
3. Retrouver la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. Démontrer qu'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$



- 1.
2.  $C_0(f) = \pi^2/3, C_n(f) = 2\frac{(-1)^n}{n^2}$  si  $n \neq 0$  après avoir fait une double IPP.

Déterminons maintenant la série de Fourier :

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2},$$

on a par identification des parties réelles et imaginaires que

$$\forall n \neq 0, a_n = 4\frac{(-1)^n}{n^2}, b_n = 0$$

De même  $C_0(f) = \pi^2/3 = a_0(f)/2$ .

Donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^N 4\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

est la somme partielle de Fourier d'ordre  $N$ .

Comme  $f$  est  $C^1$  par morceaux et  $2\pi$ -périodique alors le théorème de Dirichlet nous assure la convergence vers  $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ . Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

La fonction  $f$  étant continue en tout point de  $\mathbb{R}$ , on a même que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

3. On choisit  $x = \pi$ , ainsi

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n.$$

Donc

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{1}{n^2}.$$

Donc

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

4. Comme  $f$  est continue par morceaux et  $2\pi$ -périodique, on applique le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Comme

$$\forall n \neq 0, a_n = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}, b_n = 0$$

et  $C_0(f) = \pi^2/3 = a_0(f)/2$ , alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dt = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}.$$

Donc par parité de  $x \mapsto x^4$ ,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dt = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Donc

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$



### ► Exercice 36. ★ ★

Soient la fonction périodiques de période  $2\pi$  définie par :

$$f(x) = |x| \quad -\pi \leq x < \pi \quad (0)$$

1. Tracer la courbes représentant cette fonction.
2. Calculer sa série de Fourier : *Pour cela, vous couperez votre intégrale entre les  $x > 0$  et les  $x < 0$  pour utiliser la définition*
3. Etudier la convergence de la série de Fourier de  $f$ .
4. Dédire de ce qui précède la sommes de la série numérique suivante :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

5. Retrouver alors la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$



- 1.
2. On a vu que  $C_0(f) = \pi/2$ ,  $C_n(f) = \frac{1}{n^2\pi}((-1)^n - 1)$  si  $n \neq 0$  à l'exo 29. Inspirez-vous de la rédaction déjà vue pour faire cette question.
3. Comme  $f$  est  $C^1$  par morceaux et  $2\pi$ -périodique alors le théorème de Dirichlet nous assure la convergence vers  $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ . Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1) \cos(nx)$$

La fonction  $f$  étant continue en tout point de  $\mathbb{R}$ , on a même que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1) \cos(nx)$$

4. On choisit  $x = 0$ , ainsi

$$f(0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1) \cos(n0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)$$

$(-1)n - 1$  s'annule pour les termes pairs donc ne reste que les termes impairs. Donc

$$0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^2\pi}((-1)^{2p+1} - 1) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi}$$

$$\text{Donc } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. La série étant absolument convergente, on peut la couper en somme des pairs et des impairs. Ceci revient à faire les changements d'indice  $n = 2p$  et  $n = 2p+1$  : le premier terme pair est en  $n = 2 = 2p$ , ce qui correspond à  $p = 1$  et le premier impair est  $n = 1 = 2p+1$  ce qui correspond à  $p = 0$ . Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \quad \text{variable muette} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soit



### ► Exercice 37. ★ ★

Donner le développement en série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique définie par  $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  pour  $-\pi < x \leq \pi$  après l'avoir tracée.

Montrer que cette série de Fourier est convergente et calculer sa somme. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$



$$C_0(f) = \frac{sh(\pi)}{a\pi}, C_n(f) = \frac{(-1)^n sh(\pi)}{2\pi} \frac{2}{1+n^2} \text{ si } n \neq 0.$$

$$\text{La somme vaut } \frac{\pi ch(\pi)}{2sh(\pi)} - \frac{1}{2}$$



► **Exercice 38.** ★ ★ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^{e^{ix}}$$

1. Quelle est la régularité de  $f$  ?
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$(n+1)c_{n+1}(f) = c_n(f)$$

3. On admet que  $c_0(f) = 1$ . En déduire que pour tout  $n \geq 0$

$$c_n(f) = \frac{1}{n!}$$

et que pour tout  $n < 0$

$$c_n(f) = 0$$



1.  $f$  est de classe  $C^\infty$  comme composée de fonctions  $C^\infty$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ ,

$$\begin{aligned} c_{n+1}(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{it}} e^{-i(n+1)t} dt \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi} e^{e^{it}} \frac{e^{-i(n+1)t}}{-i(n+1)} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2i\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} i e^{it} e^{e^{it}} e^{-i(n+1)t} dt \quad \text{par IPP} \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{it}} e^{-int} dt \quad \text{car la fonction du crochet est } 2\pi \text{ périodique} \\ &= \frac{c_n(f)}{n+1} \end{aligned}$$

La formule est par ailleurs vrai pour  $n = -1$  puisque  $c_{-1}(f) = 0$  (faites le calcul c'est une dérivée usuelle).

3. Démontrez les deux par récurrence : la première en partant de  $c_0$ , la seconde par récurrence descendante à partir de  $c_{-1} = 0$ .



► **Exercice 39.** ★ ★ ★ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction  $2\pi$ -périodique, paire, telle que

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi/2 \\ 0 & \text{si } t = \pi/2 \\ -1 & \text{si } \pi/2 < t \leq \pi \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de  $f$ . Vérifier que  $f$  est continue et  $C^0$  par morceaux. Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de  $f$ .
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de  $f$ . En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

3. En appliquant le théorème de Parseval, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

4. En déduire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On pourra séparer les indices pairs et impairs dans la somme.



1. ATTENTION AU PIEGE, l'expression de  $f$  est valable seulement sur  $[0, \pi]$  donc ne pas remplacer sur  $[-\pi, \pi]$  dans l'expression du coefficient de Fourier.

$$C_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt \text{ car } f \text{ est paire.}$$

$$\text{Donc par relation de Chasles } C_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} dt = 0.$$

$$\begin{aligned} \forall n \neq 0, \quad C_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt - i \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \right) && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt && \text{car } t \mapsto f(t) \cos(nt) \text{ est paire} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(t) \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt && \text{par relation de Chasles} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(nt) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nt) dt && \text{par relation de Chasles} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi/2} - \left[ \frac{\sin(nt)}{n} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right) \\ &= \frac{\pi \sin(n \frac{\pi}{2})}{n\pi} \end{aligned}$$

$$\text{Donc si } n \text{ pair, } C_n(f) = 0. \text{ Par ailleurs } \forall p \in \mathbb{N}, C_{2p+1}(f) = \frac{2(-1)^p}{(2p+1)\pi}.$$

2. On en déduit que pour  $n$  pair,  $a_n(f) = b_n(f) = 0$  et  $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1}(f) = \frac{4(-1)^p}{(2p+1)\pi}$  et  $b_{2p+1}(f) = 0$ .

Donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N(f) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=1, n \text{ impair}}^N a_n(f) \cos(nx)$$

est la somme partielle de Fourier d'ordre  $N$ .

Je vous laisse ici toute la rédaction (voir exo 29 donnant la somme partielle de Fourier et expliquant pourquoi elle converge).

On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \sum_{n=1, n \text{ impair}}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{(2p+1)\pi} \cos((2p+1)x).$$

On l'applique en  $x = 0$  où la valeur moyenne vaut 1 puisque  $f$  est continue en 0. On en déduit que

$$1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{(2p+1)\pi}.$$

D'où l'égalité demandée.

3. On applique le théorème de Parseval puisque  $f$  est continue par morceaux et  $2\pi$ -périodique.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Je vous laisse faire le calcul à partir de cette égalité sachant que tous les  $b_n$  sont nuls de même que les  $a_{2p}$ .

4. Déjà corrigé à l'exo 31.



► **Exercice 40. ★ ★ ★ Noyau de Dirichlet**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $D_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction (appelée  $n^{\text{ème}}$  noyau de Dirichlet) définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

1. Justifier que  $D_n$  est de classe  $C^\infty$  et  $2\pi$ -périodique. Dessiner les graphes de  $D_0$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$ .
2. Montrer que si  $x = 2k\pi$ , alors

$$D_n(x) = 2n + 1$$

et pour  $x \in \mathbb{R}$  qui n'est pas un multiple entier de  $2\pi$ , on a

$$D_n(x) = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

On pourra faire apparaître la somme des termes d'une suite géométrique.

3. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction localement intégrable et  $2\pi$ -périodique. On note  $S_n(f)$  somme partielle de rang  $n$  de la série de Fourier de  $f$ , c'est-à-dire la fonction  $S_n(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$$

Montrer que

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u) D_n(u) du$$

Le résultat de la dernière question montre que  $S_n(f)$  est le produit de convolution de la fonction  $f$  avec le noyau  $n^{\text{ème}}$  de Dirichlet. Cette observation est un argument clé dans la preuve du théorème de Dirichlet.

► **Exercice 41. ★ ★ ★**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction impaire et périodique de période  $2\pi$  telle que  $f(x) = x(\pi - x)$  pour  $x \in [0, \pi]$ .

1. Développer  $f$  en série de Fourier.
2. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

3. Utiliser la formule de Parseval-Bessel pour obtenir la valeur de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$$



---


$$C_0(f) = 0, C_n(f) = \frac{2i}{n^3\pi}((-1)^n - 1) \text{ si } n \neq 0.$$

La première somme vaut  $\pi^3/32$  (en prenant  $x = \pi/2$  dans Dirichlet), la seconde  $\pi^6/960$  (par Parseval)



► **Exercice 42. ★ ★ ★ Lemme de Riemann-Lebesgue**

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique. On rappelle l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_0^{2\pi} f(t) dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$$

1. On suppose que  $f$  est absolument intégrable sur  $[0, 2\pi]$  c'est-à-dire que  $\int_0^{2\pi} |f(t)| dt$  est finie. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la quantité  $c_n(f)$  est définie et

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$$

*En d'autres termes, on vient de montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction  $f$  sont nécessairement bornés. En vérité, on peut même montrer qu'ils convergent vers 0, nous allons en faire la preuve dans le cas particulier où la fonction est  $\mathcal{C}^1$*

2. On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f') = in c_n(f)$$

en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(f) = 0$$

*Pour la première égalité, on pourra effectuer une intégration par parties.*

*On a montré que les coefficients de Fourier d'une fonction périodique  $\mathcal{C}^1$  tendent vers 0 en l'infini. En vérité, le résultat est encore vrai pour des fonctions seulement intégrables (ce résultat est connu sous le nom de lemme de Lebesgue), mais nous n'en ferons pas la preuve.*

3. On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , montrer qu'il existe  $M \geq 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{n^2}$$



Corrigé lors d'une séance de cours.



#### ► Exercice 43. ★ ★ ★

Soit  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  un nombre réel.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction  $2\pi$ -périodique, définie par  $f(x) = e^{i\alpha x}$  pour  $|x| < \pi$ .

1. Développer en série de Fourier la fonction  $f$ .
2. Etudier la convergence de la série de Fourier vers la fonction et montrer que

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}$$



$$C_n(f) = \frac{\sin((\alpha - n)\pi)}{(\alpha - n)\pi}.$$



#### ► Exercice 44. ★ ★ ★ Solutions d'équations différentielles

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  et  $2\pi$ -périodique. On se donne  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et on considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' - \alpha y = f$$

1. On suppose que  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est une solution  $2\pi$ -périodique de  $(E)$ .

(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$(in - \alpha)c_n(y) = c_n(f)$$



(b) En déduire qu'il existe une unique solution périodique donnée pour  $t \in \mathbb{R}$  par

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n(f)}{in - \alpha} e^{int}$$

2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction impaire  $2\pi$ -périodique telle que pour tout  $0 < x \leq \pi$ ,

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2}$$

Déterminer la solution périodique de l'équation différentielle (E).

► **Exercice 45.** ★ ★ ★ ★

Après l'avoir tracée, développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique définie par  $f(x) = |\sin x|$  pour  $-\pi < x < \pi$ , et  $f(\pi) = 12$ .

En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$



$$C_0(f) = \frac{2}{\pi}, C_1(f) = C_{-1}(f) = 0, C_n(f) = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2 - 1} \text{ si } n \neq 0, 1, -1.$$

La somme vaut  $1/2$ .



► **Exercice 46.** ★ ★ ★ ★

On considère la fonction impaire  $2\pi$ -périodique définie par  $f(x) = \frac{\pi - x}{2} \cos(x)$  pour  $0 < x \leq \pi$  et  $f(0) = 0$ .

1. Tracer le graphe de  $f$ .

2. Calculer les coefficients de Fourier de  $f$ , et étudier la convergence de sa série de Fourier.

3. En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$$



$$C_0(f) = C_1(f) = -C_{-1}(f) = -i/8, C_n(f) = \frac{-in}{2(n+1)(n-1)} \text{ si } n \neq 0, 1, -1.$$

La somme vaut  $-1$ .



► **Exercice 47.** ★ ★ ★ ★ Soit  $f$  de période  $2\pi$  telle que  $f(x) = x^2 + \pi x$  pour  $-\pi < x < \pi$ .

1. Tracer le graphe de  $f$ .

2. Former le développement en série de Fourier de  $f$  ainsi que la formule de Parseval. En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

3. Déduire le développement de  $F$  de période  $2\pi$  telle que  $F(x) = \int_0^x (f(t) - \pi^2/3)dt$ .

En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$



$$C_0(f) = \frac{\pi^2}{3}, C_n(f) = \frac{2(-1)^n}{n^2} + \frac{i(-1)^n \pi}{n} \text{ si } n \neq 0.$$

La première somme vaut  $-\pi^2/12$  la seconde  $\pi^2/6$ .



► **Exercice 48.** ★ ★ ★ ★ **La série de Fourier : une projection orthogonale** Pour  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  des fonctions continues par morceaux  $2\pi$ -périodiques, on définit

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt$$

Et on pose  $\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle}$  (appelée la norme 2 de  $f$ ). Pour  $n \geq 0$ , on note  $S_n(f)$  la somme partielle de rang  $n$  de la série de Fourier de  $f$ , c'est-  dire la fonction  $S_n(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$$

1. Montrer que

$$\|S_n(f)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_n(f)(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2$$

*Ce résultat peut être vu comme l'égalité de Parseval dans le cas d'une somme finie de termes.*

2. Montrer que  $\langle S_n(f)|f - S_n(f) \rangle = 0$  et que

$$\|f\|^2 = \|S_n(f)\|^2 + \|f - S_n(f)\|^2$$

3. En déduire l'inégalité de Bessel

$$\sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

*On peut interpréter ce résultat géométriquement :  $S_n(f)$  est le projet   orthogonal de  $f$  dans l'espace des polynômes trigonométrique de degré  $\leq n$ , et l'inégalité de Bessel affirme que la norme de ce projet   est plus petite que la norme de  $f$ .*

*La preuve de l'égalité de Parseval utilise l'inégalité de Bessel. En effet, la majoration*

$$\sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2$$

*assure que la série des  $|c_k|^2$  est convergente. Et pour prouver que la somme vaut  $\|f\|^2$ , il faut montrer que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n(f)\|^2 = 0.$$