

## TD : Séries entières

Pour chaque AAV, on vous propose une liste d'exercices pour atteindre l'apprentissage en profondeur : on commence par les classiques puis on ajoute une difficulté supplémentaire à chaque exo pour finir avec des problèmes. Plus vous irez loin dans les exos d'un AAV, plus il sera travaillé en profondeur.

Le symbole  $\star$  désigne approximativement le niveau de profondeur et/ou de difficulté. Il est indépendant des niveaux de la grille critériée.

### 1 AAV Déterminer le rayon de convergence d'une série entière

#### 1.1 Exos de l'aav

► **Exercice 1.  $\star$  Le classique d'Alembert décortiqué**

On souhaite déterminer le rayon de convergence de  $\sum nz^n$

1. Démontrer à l'aide du critère de d'Alembert que pour tout  $z$  complexe, si  $|z| < 1$  alors  $\sum nz^n$  converge.
2. En déduire une inégalité sur le rayon.
3. Démontrer à l'aide du critère de d'Alembert que pour tout  $z$  complexe, si  $|z| > 1$  alors  $\sum nz^n$  diverge.
4. En déduire quel est le rayon de convergence.

► **Exercice 2.  $\star$  Le classique sans d'Alembert décortiqué**

On considère la série  $\sum \sin(n)z^n$ .

1. Démontrer à l'aide d'un théorème de comparaison que pour tout  $z$  complexe, si  $|z| < 1$  alors  $\sum \sin(n)z^n$  converge. Que pouvez-vous en déduire sur le rayon de convergence.
2. Démontrer que  $\sum \sin(n)$  diverge. Conclure sur le rayon de convergence de  $\sum \sin(n)z^n$ .

► **Exercice 3.  $\star \star$  Le classique 1**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

- |                                    |  |   |
|------------------------------------|--|---|
| 1. $\sum_{n \geq 0} \ln(1+n)z^n$   | 3. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$ | 5. $\sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n$             |
| 2. $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} z^{2n}$ | 4. $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n$     | 6. $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$ |

► **Exercice 4.  $\star \star$  Le classique 2**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

- |                              |   |  |  |
|------------------------------|---|--|--|
| a) $\sum_{n \geq 0} z^{n^2}$ | b) $\sum_{n \geq 0} \cos\left(\frac{1}{n}\right) z^n$ | c) $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ | d) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$ |
|------------------------------|---|--|--|

► **Exercice 5.  $\star \star$  Avec  $a_n$  à déterminer**

Soit  $r > 0$ . On cherche à déterminer le rayon de  $\sum a_n z^n$  où la suite  $(a_n)$  est définie par  $a_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = r a_n$$

1. Déterminer l'expression des  $a_n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

2. En déduire le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$ .
3. Démontrer que pour tout  $b > 0$ , il existe  $r$  tel que le rayon de cette série vale  $b$ .

► **Exercice 6. ★ ★ ★ Un cas compliqué d'application de d'Alembert**

Considérons la suite  $(a_n)$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{n^n}{n!}$ .

1. Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . En déduire la limite de  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ .
2. Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n z^{3n}$ .

► **Exercice 7. ★ ★ ★ Séries entières paramétrées**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières paramétrées suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} b^{\sqrt{n}} z^n (b > 0) \quad \sum_{n \geq 0} a^{n^2} z^n$$

## 1.2 Problèmes

► **Exercice 8. ★ ★ ★ ★ Un exercice plus théorique**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on veut montrer que les séries entières  $\sum a_n z^n (R_1)$  et  $\sum n^\alpha a_n z^n (R_2)$  ont même rayon de convergence.

1. On commence par supposer que  $\alpha$  est positif.
  - (a) Comparer  $|n^\alpha a_n z^n|$  et  $|a_n z^n|$ . En déduire que  $R_1 \geq R_2$ .
  - (b) Soit  $\rho \in ]0, R_1[$ , écrire  $n^\alpha a_n z^n$  en fonction de  $a_n \rho^n$ .
  - (c) Démontrer qu'à partir d'un certain rang, pour tout  $z$  tel que  $|z| < \rho$ ,

$$|n^\alpha a_n z^n| \leq |a_n \rho^n|.$$

- (d) En déduire que  $R_2 \geq \rho$ .
  - (e) Expliquer alors pourquoi  $R_2 \geq R_1$ .
2. S'inspirer des questions précédentes pour traiter le cas  $\alpha < 0$ .

## 2 AAV : Calculer la somme d'une série entière

### 2.1 Travail sur quelques savoir-faire spécifiques

► **Exercice 9.**

**Savoir faire :**

Savoir effectuer un changement d'indices

Dans les sommes suivantes, effectuer le changement d'indices indiqué.

1.  $\sum_{n=1}^N a_{n-1}, p = n - 1.$
2.  $\sum_{n=1}^N n x^{n-1}, p = n - 1.$
3.  $\sum_{n=0}^N x^{n+2}, p = n + 2.$

► **Exercice 10.**

**Savoir faire :**

Comprendre que la variable de sommation est muette

1. Développer et comparer les deux sommes suivantes  $\sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1}$  et  $\sum_{p=0}^N \frac{1}{p+1}$ .
2. Démontrer que  $\sum_{n=1}^N \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n+1}$  après avoir fait le changement d'indices  $p = n - 1$ .

**► Exercice 11.****Savoir faire :**

Savoir mettre le terme général de la série sous la forme  $(f(x))^n$  ou  $(f(x))^n/n!$

Mettre sous la forme  $C \sum (f(x))^n$  ou  $C \sum \frac{(f(x))^n}{n!}$  les sommes suivantes où  $C \in \mathbb{R}$  peut dépendre de  $x$ .

$$\sum (-1)^n x^n, \quad \sum (-1)^n x^{2n}, \quad \sum \frac{3^n x^{2n+1}}{n! 2^n}, \quad \sum \frac{e^n 4^{-n}}{n!}$$

**2.2 Exos de l'aav****► Exercice 12. ★ : Un classique décortiqué**

On souhaite calculer la série entière  $\sum_{n \geq 0} n x^n$

1. Rappeler quel est le rayon et la valeur de  $\sum_{n \geq 0} x^n$ .
2. Exprimer  $\sum_{n \geq 0} n x^n$  en fonction de  $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$ .
3. Exprimer  $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$  en fonction de la dérivée de  $\sum_{n \geq 0} x^n$  sur un intervalle qu'on précisera.
4. Dédurre de toutes ces questions, la valeur de  $\sum_{n \geq 0} n x^n$ .

**► Exercice 13. ★ : Un classique décortiqué**

On définit la fonction cosh par  $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Déterminer la valeur de la somme  $\sum_{n \geq 0} \cosh(n) x^n$ .

Pour cela vous utiliserez la définition ci-dessus et vous ramènerez à une somme de deux séries géométriques.

**► Exercice 14. ★★ : Un classique**

On définit la fonction sinh par  $\forall x \in \mathbb{R}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Déterminer, pour chacune des séries suivantes, son domaine de convergence et sa somme pour  $x$  réel.

$$1. \sum_{n \geq 0} \frac{n x^n}{n!} \quad 2. \sum_{n \geq 0} \sinh(na) x^n, (a > 0) \quad 3. u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!} \quad 4. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!} x^n$$

**► Exercice 15. ★★ : Un classique**

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme pour  $x \in \mathbb{R}$  des séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n.$$

**► Exercice 16. ★★ L'utilité de la division euclidienne**

1. Effectuez la division euclidienne de  $3X$  par  $X + 1$ .
2. Déterminer le rayon de convergence de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+1} x^n$  puis calculer sa somme.

► **Exercice 17. ★ ★ ★ Ecrire l'exponentielle comme une série**

1. Résoudre le problème de Cauchy suivant et dire combien il a de solutions :

$$\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

2. On considère  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Quel est le domaine de convergence de la série associée ?
3. Démontrer que  $S$  est solution du problème de Cauchy de la question 1. Qu'en concluez-vous ?

► **Exercice 18. ★ ★ ★ Passer par une équation différentielle**

On considère la fonction  $S : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ .

1. Quel est le domaine de convergence de cette série ?
2. Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, S''(x) + S'(x) + S(x) = e^x$ . Calculer  $S(0)$ .
3. En déduire la valeur de  $S$ .

## 2.3 Problèmes

► **Exercice 19. ★ ★ ★ Probabilités et séries entières**

Une agence de publicité téléphone à ses clients pour lui vendre un produit. Lorsqu'elle téléphone à un client, la probabilité qu'elle arrive à le joindre est  $0 < p < 1$ , qu'elle n'y arrive pas  $1 - p$ .

Soit  $X$  une variable qui compte le nombre d'appels nécessaires pour joindre la personne.

1. Expliquez pourquoi  $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .
2. Démontrez que la somme des probabilités vaut bien 1 c'est-à-dire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1.$$

3. On cherche le nombre de moyens d'essais avant de réussir à contacter la personne. Celui-ci est donné par l'espérance de  $X$  donné par

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k).$$

Calculer cette espérance. On pourra déterminer au préalable la valeur de  $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$  pour  $x$  dans un certain intervalle.

4. On cherche à mesurer maintenant la moyenne de l'écart par rapport à la moyenne donné par la variance

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k - E(X))^2 P(X = k).$$

Calculer la variance. On pourra déterminer au préalable la valeur de  $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$  pour  $x$  dans un certain intervalle.

### 3 AAV Développer une fonction en série entière

#### 3.1 Travail sur quelques savoir-faire spécifiques

► **Exercice 20.**

**Savoir faire :**

Savoir obtenir un DSE à l'aide de techniques calculatoires (éls simples, factorisation, somme de DSE)

Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$  et  $g : x \mapsto \ln(1+x)$ .

1. Ecrire  $\frac{1}{5x-6}$  en fonction de  $f$ . Vous préciserez l'ensemble de définition de votre égalité.
2. A l'aide d'une décomposition en éléments simples, exprimer  $\frac{1}{(3x-4)(x-5)}$  en fonction de  $f$ . Vous préciserez l'ensemble de définition de votre égalité.
3. Ecrire  $\ln(x-12)$  en fonction de  $g$ . Vous préciserez l'ensemble de définition de votre égalité.
4. Ecrire  $\ln(x^2-7x+12)$  en fonction de  $g$  (vous pourrez factoriser le trinôme pour commencer). Vous préciserez l'ensemble de définition de votre égalité.

#### 3.2 Exos de l'aav

► **Exercice 21. ★ : Variations de DSE usuels**

Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions de la variable réelle suivantes et préciser l'intervalle de validité du développement :

$$1. f(x) = \frac{1}{2x-1} \quad 2. g(x) = \ln(1+4x) \quad 3. h(x) = \cos(x^2) \quad 4. k(x) = \sin(3x).$$

► **Exercice 22. ★★ : DSE plus futés mais guidés**

Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions de la variable réelle suivantes et préciser l'intervalle de validité du développement :

1.  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$  en faisant une décomposition en éléments simples. Vous déterminerez alors le développement de chaque terme de la décomposition puis vous summerez ces deux décompositions.
2.  $g(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$  : vous ferez d'abord le développement en série entière de la fonction  $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$  puis vous utiliserez le théorème d'intégration des séries entières.

► **Exercice 23. ★★ : DSE plus futés**

Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions de la variable réelle suivantes et calculer le rayon de convergence de la série :

$$1. f(x) = \frac{1}{(2x-1)(-x+2)} \quad 2. g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad 3. f(x) = \ln(x^2-5x+6).$$

► **Exercice 24. ★★★ Les lapins de Fibonacci.**

L'objectif est de trouver une façon alternative de calculer la suite de Fibonacci donnée par  $F_0 = 0, F_1 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Pour cela, on considère la série entière  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$ .

1. Multiplier la relation  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  par  $x^{n+2}$  et summez-la entre 0 et  $+\infty$ . En déduire que  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ .
2. Développer  $f$  en série entière et précisez l'intervalle d'existence de ce développement.
3. En déduire l'expression de  $F_n$  pour tout  $n$  entier naturel.

### 3.3 Problèmes

► **Exercice 25.** ★ ★ ★ ★ **Exponentielle de matrice : des séries entières de matrices aux systèmes différentielles**

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de l'exponentielle vue comme série entière. En particulier, on rencontre dans ce problème la notion d'exponentielle matricielle. On rappelle que sur un

certain domaine de convergence  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on admet qu'on peut définir l'objet suivant appelé exponentielle matricielle

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

- (a) Pour  $n = 2$ ,  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , calculer  $e^{tD}$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .
- (b) Déterminez les solutions du système différentiel

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = D \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

et exprimez-les en fonction de  $e^{tD}$ .

- (c) Calculer  $e^{tR}$  pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (d) Diagonaliser la matrice  $R$ .
- (e) En déduire la forme des solutions de

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = R \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

et exprimez les en fonction de  $e^{tR}$ .

3. Démontrez que si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  alors  $e^\lambda$  est valeur propre de  $e^A$
4. En déduire si le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé à racines simples réelles alors  $e^A$  est diagonalisable à valeurs propres réelles.

## 4 Trouver une solution DSE d'une équation différentielle

### 4.1 Travail sur quelques savoir-faire spécifiques

► **Exercice 26.**

**Savoir faire :**

Savoir deviner l'expression d'une suite définie par une relation de récurrence

Déterminer l'expression de  $a_n$  par tâtonnement en fonction de ses premiers termes quand

1.  $a_{n+1} = 2a_n$  (vous exprimerez  $a_n$  en fonction de  $a_0$ ).
2.  $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$  (vous exprimerez  $a_n$  en fonction de  $a_0$ ).
3.  $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$  (vous exprimerez  $a_n$  en fonction de  $a_1$ ).
4.  $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_{n-1}$ . Séparez entre pairs et impairs. Essayez de faire au maximum apparaître des factorielles et des puissances. (Vous exprimerez  $a_n$  en fonction de  $a_0$  pour les pairs,  $a_1$  pour les impairs).

## 4.2 Exos de l'aav

### ► Exercice 27. ★ ★ Le classique décortiqué

On cherche à trouver des solutions développables en série entière de l'équation différentielle  $x^2 f' - f = -x^2$ .

1. **Analyse :** On se donne  $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et on cherche les  $a_n$  tels que  $y$  soit solution de l'équation.

(a) Démontrer que si  $y$  est solution alors

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad -a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n-1)a_{n-1} - a_n)x^n = -x^2.$$

(b) En déduire les relations suivantes sur les coefficients :  $a_0 = 0 = a_1$ ,  $a_2 = 1$  et

$$\forall n \geq 3, a_n = (n-1)a_{n-1}$$

(c) Démontrer alors par récurrence sur  $n$  que

$$\forall n \geq 2, a_n = (n-1)!$$

2. **Synthèse :** On considère maintenant la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)! x^n$$

et on veut déterminer son intervalle d'existence.

- (a) Déterminer son rayon de convergence.
- (b) En déduire l'intervalle d'existence d'une solution développable en série entière.

### ► Exercice 28. ★ ★ Le classique

1. Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle  $(1+x^2)f'' - 2f = 0$ . Calculer leur rayon de convergence et expliciter leur somme.
2. Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle suivante :

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

► **Exercice 29. ★ ★ ★ Plus dur** Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2xy' + 2y = 0.$$

Parmi les solutions obtenues, trouver celles qui sont paires, et exprimer le résultat à l'aide de fonctions usuelles.

### ► Exercice 30. ★ ★ ★ DSE de $\arcsin(x)^2$ .

On considère  $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ . On rappelle que  $\forall x \in ]-1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

1. Démontrer que  $(1-x^2)f' = xf + 1$ .
2. Déterminer les solutions DSE de cette équation. Déterminer celle vérifiant  $f(0) = 0$ .
3. On admet que  $f$  est égale à cette série entière. En déduire un DSE de  $\arcsin(x)^2$ .

## 5 Problème

### ► Exercice 31. ★ ★ ★ ★

Le but de ce problème est de donner, dans les parties I et II, quatre expressions différentes du réel  $\ln(2)$  sous la forme d'une somme de série.

On rappelle que pour une série  $\sum_{k \geq 1} u_k$ , le reste d'indice  $n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  est le réel défini par  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ .

#### Partie I :

1. Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur  $] -1, +\infty[$  par  $x \mapsto \ln(1+x)$ .
2. Montrer alors que  $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$ .
3. (a) Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière  $\sum_{k \geq 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ .  
(b) En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$ .

#### Partie II.

On considère dans la suite de ce problème, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1 \times 3 \dots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$ . On rappelle la formule de Stirling :  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .  
(b) Montrer que la série de terme général  $a_n$  est convergente.
2. On considère la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx$ .  
(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n - I_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{2n+1}$ .  
(b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{2^n n!} \frac{\pi}{2}$ , puis donner une relation liant  $I_n$  et  $a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. (a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f_n(x) = \frac{\sin^{2n}(x)}{n}$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  vers une fonction  $f$  que l'on déterminera.  
(b) Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et que  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$ .
4. On note  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$ .  
(a) En utilisant un changement de variable, montrer que  $J$  est convergente et que  $I = J$ .  
(b) En calculant  $I + J$ , trouver la valeur de  $I$ .
5. Donner, en le justifiant, la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .