

Cours : Séries entières

Dans ce poly on trouve :

- en début de section, des savoir faire reliés. Attention, cela ne signifie pas que la partie ne traite que de ce savoir-faire. Elle donne certains outils permettant de le traiter.

Socle de base pour ce chapitre : Le chapitre nécessite la maîtrise

- des suites numériques.
- des séries numériques.
- des développements limités, équivalents.

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de séries entières. Cette notion intervient est utile en probabilités (étude de la loi géométrique, de la loi de Poisson), en dénombrement (compter le nombre de parenthésages), en équations différentielles (trouver des solutions de certaines équations). Nous en introduisons ici les bases fondamentales.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . $|\cdot|$ désigne soit la valeur absolue, soit le module. (a_n) sera une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1 Domaine de convergence des séries entières

Savoir faire :

- Savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière.
- Savoir calculer la somme d'une série entière.

1.1 Définitions et rayon de convergence

Question bête n°1 : Le chapitre introduit la théorie des séries entières mais qu'est-ce qu'une série entière ?

Définition 1: Série entière

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on appelle série entière une série du type $\sum f_n(z)$ où $f_n : z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n$. On note $\sum a_n z^n$ cette série.

Remarque 1: Piège 1

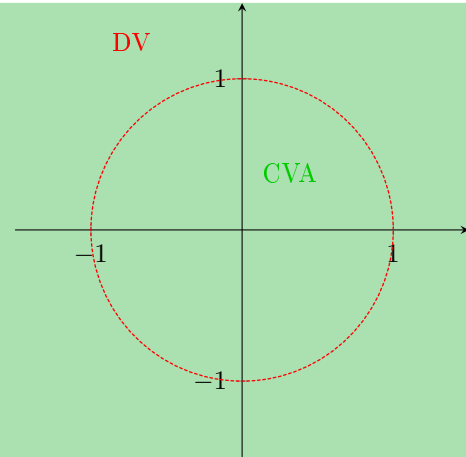
Si le coefficient a_n dépend de z , $\sum a_n(z) z^n$ n'est pas une série entière ! Par exemple $\sum \ln(nz) z^n$ n'est pas une série entière.

Exemple 1: Les classiques

- La série géométrique : $\sum z^n$.

Cette série converge si et seulement si $|z| < 1$. On a par ailleurs

$$\forall |z| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$



- La série exponentielle : $\sum \frac{z^n}{n!}$ qui converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. **Le domaine est un disque infini.**

En effet, pour $z = 0$, la série est la série nulle donc elle converge. Si $z \neq 0$, alors $|nz^n| > 0$ et on peut appliquer le critère de d'Alembert :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$$

Donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Vous pouvez d'ores et déjà retenir que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ces deux séries convergent sur un disque d'un certain rayon (1 pour la géométrique, infini pour l'exponentielle) et divergent en dehors. Nous allons voir que cette propriété se propage à toute série entière : le domaine de convergence d'une série entière est toujours un disque. Le résultat essentiel pour parvenir à cela est le lemme d'Abel.

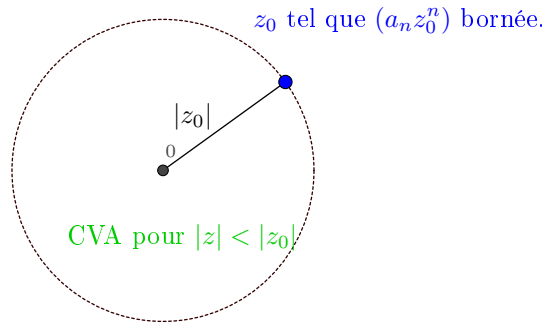
Lemme 1: Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

S'il existe $z_0 \neq 0$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée alors pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$,

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolument.

Voici une illustration de ce que signifie le lemme d'Abel :



Preuve :

Ce qu'on sait : On sait que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.

Traduction : cad que $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| \leq M$.

Ce qu'on veut : On veut montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0| \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolument.

Traduction : cad que $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0| \implies \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$ converge.

Pour cela on essaie d'appliquer un théorème de comparaison, en faisant apparaître en force la suite bornée :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |a_n z^n| &= |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \\ &\leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \quad \text{car } (a_n z_0^n) \text{ est bornée.} \end{aligned}$$

Or si $|z| < |z_0|$ alors $\sum \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ converge car c'est une série géométrique de rayon inférieur strictement à 1.

Donc par théorème de comparaison, si $|z| < |z_0|$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Ceci nous permet d'obtenir le corollaire suivant, étape cruciale pour montrer que le domaine de convergence est un disque :

Corollaire 1:

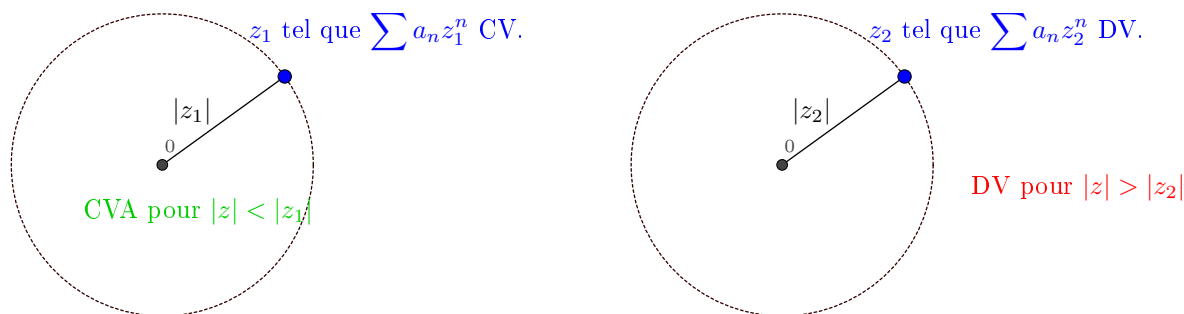
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

1. S'il existe $z_1 \neq 0$ tel que $\sum a_n z_1^n$ converge alors pour tout complexe z tel que $|z| < |z_1|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2. S'il existe $z_2 \neq 0$ tel que $\sum a_n z_2^n$ diverge alors pour tout complexe z tel que $|z| > |z_2|$, $\sum a_n z^n$ diverge.

Ce résultat illustré sur le dessin est impressionnant :

- si on trouve un complexe z_1 en lequel la série entière converge. Alors si on trace le cercle centré en 0 passant par z_1 , la série entière converge absolument en tout point situé à l'intérieur du cercle.
- si on trouve un complexe z_2 en lequel la série entière diverge. Alors si on trace le cercle centré en 0

passant par z_2 , la série entière diverge en tout point situé à l'extérieur du cercle.



Remarque 2:

- Attention si on a la convergence en un point z_1 , on ne peut rien dire sur la partie extérieure au cercle ($|z| > |z_1|$). De même, si on a la divergence en un point z_2 , on ne peut rien dire sur la partie intérieure au cercle ($|z| < |z_2|$).
- Le point 1) n'est absolument pas usuel car il est du type CV en un z_1 implique CVA sur le disque ouvert de rayon $|z_1|$! Habituellement la convergence ne permet de rien obtenir en termes de convergence absolue.

Preuve :

1. **Ce qu'on sait :** $\sum a_n z_1^n$ converge

Ce qu'on veut : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_1| \Rightarrow \sum a_n z^n$ CVA.

Or si $\sum a_n z_1^n$ converge alors $a_n z_1^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Toute suite convergente étant bornée, on en déduit que $(a_n z_1^n)$ est bornée.

Donc d'après le lemme d'Abel $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_1| \Rightarrow \sum a_n z^n$ CVA.

2. **Ce qu'on sait :** $\sum a_n z_2^n$ diverge

Ce qu'on veut : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > |z_2| \Rightarrow \sum a_n z^n$ DV.

Raisonnons par l'absurde : s'il existe z_0 tel que $|z_0| > |z_2|$ et $\sum a_n z_0^n$ CV.

Alors d'après le 1), on aurait $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0| \Rightarrow \sum a_n z^n$ CVA.

En particulier pour z_2 , $\sum a_n z_2^n$ convergerait absolument ce qui est absurde.

Donc $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > |z_2| \Rightarrow \sum a_n z^n$ DV.

Cette proposition a pour conséquence le fait que le domaine se divise en deux parties : un disque à l'intérieur duquel il y a convergence absolue, à l'extérieur duquel il y a divergence.

Théorème 1: Rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors

1. soit $\forall z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n$ converge et dans ce cas (pour les séries entières) $\forall z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n$ converge absolument.

2. soit $\forall z \in \mathbb{C}^*, \sum a_n z^n$ diverge
3. soit $\exists R > 0, \begin{cases} \forall z, |z| < R \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument.} \\ \forall z, |z| > R \implies \sum a_n z^n \text{ diverge.} \end{cases}$

Par convention pour 1), on pose $R = +\infty$ et pour 2) $R = 0$.

Le réel R est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. On notera le couple série entière/rayon de convergence $\sum a_n z^n(R)$.

Exemple 2:

Quels sont les rayons de convergence de ?

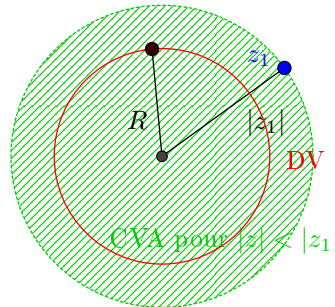
- La série géométrique est de rayon de convergence $R = 1$.
- La série exponentielle est de rayon $R = +\infty$.
- $\sum n! z^n$ est de rayon 0 car pour tout $z \neq 0$, son terme général ne tend pas vers 0.

Remarque 3:

Une série entière n'est pas nécessairement centrée en $R = 0$: $\sum a_n (z - z_0)^n$ pour $z_0 \in \mathbb{C}$.
La théorie est identique excepté que le disque de convergence sera centré autour de z_0 au lieu de 0 !

1.2 Comment calculer le rayon de convergence

1.2.1 Conséquence des résultats impressionnants



Supposons qu'une série entière $\sum a_n z^n$ converge en $z_1 \in \mathbb{C}$ un complexe quelconque. Nous avons vu au paragraphe précédent que si on trace le cercle centré en 0 passant par z_1 , la série entière converge absolument en tout point situé à l'intérieur du cercle. Autrement dit

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_1| \implies \sum a_n z^n \text{ CVA.}$$

Or on sait que le domaine de convergence est un disque de rayon R à déterminer. On en déduit que ce disque contient au moins le disque de rayon $|z_1|$. Donc

$$R \geq |z_1|.$$

En effet, comme on le voit sur le dessin, si R était inférieur à $|z_1|$, alors il y aurait une zone où la série CVA et DV en même temps (couronne hachurée en vert à l'extérieur du cercle rouge). Supposons maintenant

qu'une série entière $\sum a_n z^n$ diverge en $z_2 \in \mathbb{C}$ un complexe quelconque. Nous avons vu au paragraphe précédent qu'alors si on trace le cercle centré en 0 passant par z_2 , la série entière diverge en tout point situé à l'extérieur du cercle. Autrement dit

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| > |z_2| \implies \sum a_n z^n \text{ DV.}$$

Or on sait que le domaine de convergence est un disque de rayon R à déterminer. On en déduit que ce disque contient au plus le disque de rayon $|z_2|$. Donc

$$R \leq |z_2|.$$

Essayez de faire un dessin équivalent au précédent pour bien visualiser cela.

En résumé, une information sur la nature de la série en UN point suffit à donner une inégalité sur le rayon de convergence. Nous verrons que ceci est très utile à la détermination de ce rayon.

1.2.2 Le critère de d'Alembert

Pourquoi d'Alembert ?

Le critère de d'Alembert est particulièrement adapté aux séries entières car celui s'applique bien aux termes généraux de type produit et qu'il y a du z^n dans les séries entières.

Quelle erreur éviter dans son application ?

Comme tout théorème, le critère de d'Alembert est valide sous certaines hypothèses qu'il s'agit de respecter. En particulier, le terme général doit être strictement positif. Il s'agit donc dans la démo :

1. de distinguer le cas $z = 0$ de $z \neq 0$.
2. d'appliquer le critère à $|a_n z^n|$ car un complexe n'a pas de signe !

Exemple 3:

Déterminer le rayon de convergence de $\sum n^2 z^n$.

On étudie pour $u_n(z) = a_n z^n$.

1. En $z = 0$, la série est nulle donc elle converge.
2. Si $z \neq 0$, $|u_n(z)| > 0$ donc on peut appliquer le critère de d'Alembert :

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| &= \frac{(n+1)^2}{n^2} |z| \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 |z| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|. \end{aligned}$$

Si $|z| < 1$, alors $\sum u_n(z)$ CVA donc CV. Donc $R \geq 1$.

Si $|z| > 1$, alors $\sum u_n(z)$ DV. Donc $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

► **Exercice 1.** Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $\sum n! z^n$, $\sum n z^{2n}$.

► **Activité 1.** Trouver l'erreur : $\sum (-z)^n$, $u_n(z) = (-z)^n$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -1$ donc $R = -1$.

1.2.3 Et si on ne peut appliquer le critère de d'Alembert ?

Quand n'est-il pas applicable ?

Il n'est pas applicable lorsque $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ n'a pas de limite.

Que faire alors ?

Quand le critère de d'Alembert n'est pas applicable, une série entière n'en reste pas moins une série à laquelle vous pouvez appliquer les autres critères comme les théorèmes de comparaison par exemple.

Exemple 4: comparaison à majoration

Déterminons le rayon de convergence de $\sum \sin(n)z^n$.

$$\forall z, \forall n, 0 \leq |\sin(n)z^n| \leq |z^n|.$$

Or si $|z| < 1$, alors $\sum z^n$ CVA.

Donc par théorème de comparaison $\sum \sin(n)z^n$ CVA donc CV. Donc $R \geq 1$.

Pour $z = 1$, $\sin(n)$ ne tend pas vers 0 donc $\sum \sin(n)$ DV.

Donc $\forall z, |z| > 1$, $\sum \sin(n)z^n$ DV. Donc $R \leq 1$ (voir la partie *Conséquence des résultats impressionnants*). Finalement $R = 1$.

Exemple 5: majoration à équivalents

Déterminons le rayon de convergence de $\sum (n + (-1)^n)z^n$.

$$|(n + (-1)^n)z^n| \underset{\infty}{\sim} |nz^n|.$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |nz^n|.$$

Or si $|z| < 1$, alors $\sum nz^n$ CVA (appliquez le critère de d'Alembert).

Donc par théorème de comparaison $\sum (n + (-1)^n)z^n$ CVA donc CV. Donc $R \geq 1$.

Par ailleurs si $z = 1$, alors $\sum (n + (-1)^n)$ DV car $n + (-1)^n$ ne tend pas vers 0.

Donc $R \leq 1$.

Finalement $R = 1$.

1.3 Que se passe-t-il sur le cercle de rayon R ?

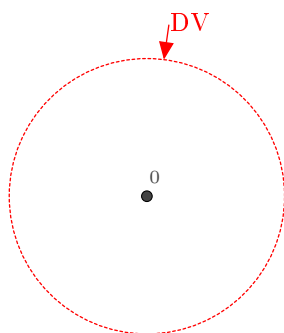
Définition 2: Cercle d'incertitude

On appelle cercle d'incertitude d'une série entière de rayon de convergence R , l'ensemble

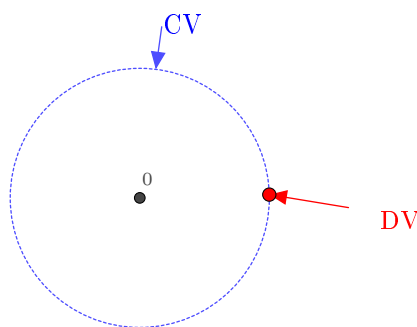
$$C_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}.$$

C'est le seul endroit où on ne peut rien dire de manière générale. Voici trois exemples qui de configurations très différentes :

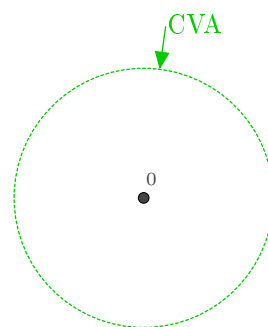
Comportement de $\sum z^n$



Comportement de $\sum \frac{z^n}{n}$



Comportement de $\sum \frac{z^n}{n^2}$



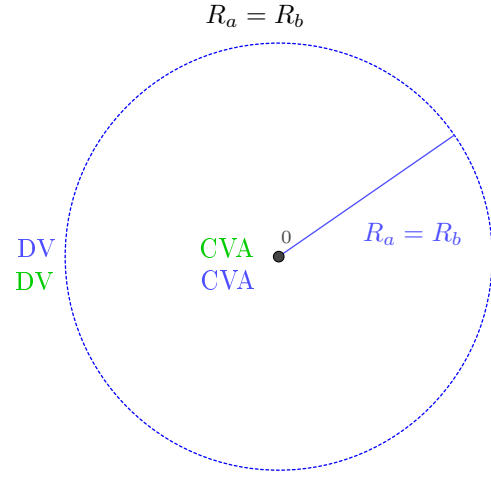
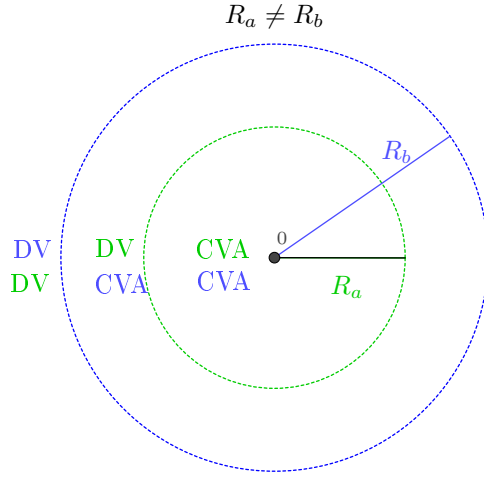
Donnons-nous trois séries de rayon 1 : $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ et étudions-les sur le cercle d'incertitude cad lorsque $|z| = 1$.

1. Pour la première, si $|z| = 1$ alors $\sum z^n$ diverge puisque le terme général est de module 1 donc ne tend pas vers 0.
2. $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge en $z = 1$ car $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Elle converge en $z = -1$ car $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par critère des séries alternées. On peut même montrer que pour tout autre z de module 1, elle converge. Pour cela, on utilise la transformation d'Abel (voir td). En revanche, elle ne converge absolument en aucun point du cercle car $\sum \left| \frac{z^n}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ qui est une série de Riemann divergente.
3. Enfin en tout point du cercle, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ CVA car $\sum \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \sum \frac{1}{n^2}$ qui est une série de Riemann convergente.

1.4 Opérations sur les séries entières

Question : Que se passe-t-il si on somme deux séries entières $\sum a_n z^n (R_a)$, $\sum b_n z^n (R_b)$?

On a essentiellement deux cas de figure : soit $R_a = R_b$, soit ils sont différents et dans ce cas, on peut supposer que $R_a < R_b$. Dans les dessins ci-dessous, nous mettons en vert ce qui est relatif à $\sum a_n z^n (R_a)$ et en bleu ce qui est relatif à $\sum b_n z^n (R_b)$.



Dans ce cas, on a trois cas de figure :

- soit on est dans le petit cercle auquel cas les deux séries convergent absolument donc la série $\sum (a_n + b_n)z^n$ converge absolument.
- soit on est dans la couronne entre les deux cercles où $\sum a_n z^n$ converge absolument mais $\sum b_n z^n$ diverge. Donc la somme diverge.
- soit on est à l'extérieur du grand cercle, auquel cas les deux séries divergent. A priori, on ne sait donc pas la nature de la somme. Mais $\sum (a_n + b_n)z^n$ est une série entière donc son domaine de convergence se partage entre un disque convergent à l'extérieur duquel il y a divergence. Comme la série diverge dans la couronne, elle diverge à l'extérieur.

Le dessin semble donc indiquer que $R = R_a$ c'est-à-dire que le rayon est le plus petit des deux rayons.

On vient de faire la preuve par le dessin du théorème suivant :

Théorème 2: Somme de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n (R_a)$ et $\sum b_n z^n (R_b)$ deux séries entières. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n)z^n$. Alors

1. $R \geq \min(R_a, R_b)$.
2. Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.

Dans tous les cas, pour tout complexe z vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum (a_n + b_n)z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n$$

Preuve :

Ceci est la preuve formelle : elle s'inspire directement du raisonnement précédent le théorème.

On sait que $\forall z, |z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum a_n z^n$ CVA et $\sum b_n z^n$ CVA. Donc

$$\forall z, |z| < \min(R_a, R_b), \quad \sum (a_n + b_n)z^n \text{ CVA.}$$

On en déduit que $R \geq \min(R_a, R_b)$.

Maintenant si $R_a \neq R_b$, supposons que $R_b > R_a$ (l'autre cas se fait identiquement). pour z tel que $R_a < |z| < R_b$, $\sum a_n z^n$ DV et $\sum b_n z^n$ CVA donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ DV. On en déduit donc que $R \leq \min(R_a, R_b)$ et donc qu'on a $R = \min(R_a, R_b)$.

Remarque 4:

Attention si $R_a = R_b$, le rayon R de la somme peut être strictement plus grand : si

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \quad 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} 0z^n$ est une série entière de rayon infini > 1 somme de deux séries de rayon 1.

Exemple 6:

Déterminez le rayon de convergence de la somme des séries entières $\sum z^n$ et $\sum \left(\frac{z}{3}\right)^n$.

$\sum z^n$ est de rayon de convergence 1 et $\sum \left(\frac{z}{3}\right)^n$ de rayon 3. **Ces deux rayons étant différents**, la somme est de rayon **égal** au minimum c'est-à-dire 1.

Et

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (z^n + \left(\frac{z}{3}\right)^n) = \frac{1}{1-z} + \frac{3}{3-z}.$$

Dans la suite, on s'intéresse à l'objet somme

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

qui est une fonction. Quelles propriétés a cette fonction ? Peut-on la dériver ? Est-elle continue ?

2 Régularité de la somme

Savoir faire :

- Savoir calculer la somme d'une série entière.

Considérons l'équation différentielle $y''(x) - xy(x) = 0$. C'est une équation différentielle à coefficients non constants.

Comment en trouver des solutions. Recherchons des solutions sous la forme de série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

et injectons dans l'équation. On est amené à dériver deux fois y . Est-ce possible de dériver une série ? Si oui comment est-ce possible et que vaut la dérivée ? Avant de pouvoir dériver une série entière, il faut d'abord s'assurer de sa continuité.

2.1 Continuité

Une série entière est continue dans le disque ouvert (bord a priori exclu) de rayon le rayon de convergence.

Théorème 3:

Soit $\sum a_n z^n(R)$ une série entière alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert

$$D_R(0) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}.$$

Exemple 7:

La série entière $\sum z^n$ est de rayon 1. On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert $D_1(0)$.

2.2 Série dérivée, série intégrée

On se pose maintenant la question de dériver les séries entières. Par la même occasion nous étudions l'intégration de ces séries. Cela sert dans divers contextes :

- à déterminer certaines solutions d'équations différentielles.
- à obtenir le développement de fonctions qui sont la dérivée ou la primitive de développement en série entière.

Question : Peut-on intégrer dériver une série entière ?

Soit $\sum a_n z^n(R)$ une série entière, intuitivement on aurait envie de dire que la série dérivée serait $\sum n a_n z^{n-1}$ et la série intégrée $\sum a_n z^{n+1}/(n+1)$. Cependant c'est pour l'instant peu rigoureux étant donné que la dérivation et l'intégration dans \mathbb{C} sont hors programme. Cela n'empêche pas d'étudier ces séries et d'en trouver le rayon.

Lemme 2:

Soient les séries entières $\sum a_n z^n(R)$, $\sum n a_n z^{n-1}(R_d)$ et $\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}(R_i)$.
Alors

$$R = R_d = R_i.$$

Preuve :

Ceci est une preuve difficile.

L'idée de la preuve est de comparer les termes généraux de ces séries pour déduire des relations entre les différents de convergence. Concrètement la preuve démontre que

$$R \geq R_d \geq R_i \geq R$$

qui revient à montrer que

$$R = R_d = R_i.$$

Montrons que $R \geq R_d$:

Pour cela on compare $a_n z^n$ à $na_n z^{n-1}$ en valeur absolue :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq |a_n z^n| &= \frac{|z|}{n} |na_n z^{n-1}| \\ &\leq |z| |na_n z^{n-1}| \quad \text{car } n \geq 1 \end{aligned}$$

Or $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_d$, $\sum na_n z^{n-1}$ converge absolument.

Donc par comparaison, $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_d$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Donc $R \geq R_d$.

Montrons que $R_i \geq R$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq |a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}| &= \frac{|z|}{n+1} |a_n z^n| \\ &\leq |z| |a_n z^n| \quad \text{car } n \geq 0 \end{aligned}$$

Or $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Donc par comparaison, $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ converge absolument.

Donc $R_i \geq R$.

Montrons que $R_d \geq R_i$:

Ce cas est compliqué : l'idée est de montrer que $\forall \rho < R_i, R_d \geq \rho$ car alors on aura $R_d \geq R_i$.

Pour passer par ρ ? Car ρ est dans le disque de rayon R_i et à cet endroit, la série intégrée converge, ce qu'on n'a pas forcément en R_i .

Soit $\rho < R_i$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad 0 \leq |na_n z^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|z|^2} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{n+1} |a_n \frac{\rho^{n+1}}{n+1}|$$

Pour $|z| < \rho$, $\frac{n(n+1)}{|z|^2} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

Donc pour $|z| < \rho$ et n assez grand, cette suite est inférieure à 1 et donc

$$0 \leq |na_n z^{n-1}| \leq |a_n \frac{\rho^{n+1}}{n+1}|$$

Or $\sum |a_n \frac{\rho^{n+1}}{n+1}|$ converge car $\rho < R_i$.

Donc par comparaison, $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, $\sum na_n z^{n-1}$ converge absolument.

Donc $R_d \geq \rho$.

Ceci est vrai pour tout $\rho < R_i$ donc $R_d \geq R_i$.

On n'a pas montré que l'on peut intégrer ou dériver terme à terme $\sum a_n z^n$. Peut-on le faire ? La réponse sera oui mais il faut se placer dans \mathbb{R} espace où vous connaissez dérivation et intégration.

2.3 Dérivation, intégration d'une série entière réelle

On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans toute cette section. On note x à la place de z .

Théorème 4: Intégration des séries entières

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de \mathbb{R} $((a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}!)$ de rayon R . Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ a

1. même rayon de convergence R .

2. pour somme $\int_0^x S(t)dt$.

Autrement dit $\forall x \in]-R, R[, \int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.

Remarque 5:

La difficulté essentielle levée par ce théorème est l'interversion des symboles $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et \int_0^x qui bien que tentante n'est absolument pas triviale.

Exemple 8:

Nous avons étudié par le passé la série géométrique :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Le théorème d'intégration assure qu'une primitive de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est donnée par $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On obtient donc, en intégrant l'égalité ci-dessus, l'écriture de $-\ln(1-x)$ en série entière

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

Ainsi on a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Remarque 6:

Notez que dans l'exemple précédent, on vient de calculer la valeur de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ en intégrant une série entière connue. Ceci vous sera utile pour calculer des sommes de séries entières.

Théorème 5: Dérivation des séries entières

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de \mathbb{R} $((a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}!)$ de rayon R . Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ a

1. même rayon de convergence R .

$$2. S \text{ est dérivable sur }]-R, R[\text{ et } \forall x \in]-R, R[, S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Remarque 7:

La difficulté essentielle levée par ce théorème est l'interversion des symboles $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\frac{d}{dx}$ qui bien que tentante n'est absolument pas triviale.

Exemple 9:

Nous avons étudié par le passé la série géométrique :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Le théorème de dérivation assure que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et que sa dérivée est donnée par $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$. On obtient donc, en dérivant l'égalité ci-dessus, l'écriture de $\frac{1}{(1-x)^2}$ en série entière

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Remarque 8:

Notez que dans l'exemple précédent, on vient de calculer la valeur de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ en dérivant une série entière connue. Ceci vous sera utile pour calculer des sommes de séries entières.

Exemple 10: Résolution d'équations différentielles

Nous verrons dans la suite que les séries entières permettent de résoudre des équations différentielles.

Considérons par exemple, l'équation $y'' - xy = 0$ et cherchons une solution sous forme de série entière $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où les a_n sont des quantités à trouver afin de trouver y . Trouver une solution nécessite de dériver deux fois y afin de l'injecter dans l'équation et trouver les a_n . Le théorème de dérivation des séries entières nous assure le fait qu'on puisse dériver sur l'intervalle de définition de y et sur cet intervalle,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

► **Exercice 2.** Démontrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ vérifie le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Corollaire 2: Caractère C^∞ et expression de a_n

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n(R)$ la somme d'une série entière

alors $S \in C^\infty(] - R, R[, \mathbb{C})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Preuve :

Ce qu'on veut : Montrer que S est infiniment dérivable et calculer a_n .

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que S est de classe $C^p(] - R, R[)$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in] - R, R[, \quad S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p}$$

Initialisation : C'est le théorème de dérivation qui démontre tout !

Hérédité : Supposons que ce soit vrai au rang $p \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\forall x \in] - R, R[, \quad S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p}$$

On peut écrire $S^{(p)}$ comme une série entière :

$$\begin{aligned} \forall x \in] - R, R[, \quad S^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} (l+p)(l+p-1) \dots (l+1) a_{l+p} x^l && \text{en posant } l = n - p \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) a_{n+p} x^n && \text{car la variable } l \text{ est muette.} \end{aligned} \tag{1}$$

donc d'après le théorème de dérivation, $S^{(p)}$ est de classe $C^1(] - R, R[)$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in] - R, R[, \quad S^{(p+1)}(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) a_{n+p} x^n \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) n a_{n+p} x^{n-1} \\ &= \sum_{l=p+1}^{+\infty} l(l-1) \dots (l-p) a_l x^{l-(p+1)} && \text{via le changement d'indice } l = n + p \\ &= \sum_{n=p+1}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p) a_n x^{n-(p+1)} && \text{car } l \text{ est muette} \end{aligned} \tag{2}$$

Donc on a bien montré par récurrence que $S \in C^{p+1}(] - R, R[)$ et que

$$\forall x \in] - R, R[, \quad S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

Expression des a_n :

En appliquant l'égalité précédente en $x = 0$,

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \quad S^{(p)}(0) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n 0^{n-p} \\ &= p(p-1) \dots (p-p+1) a_p \quad \text{car seul le terme en } n=p \text{ est non nul } (0^0=1) \\ &= p! a_p. \end{aligned} \tag{3}$$

D'où l'expression des a_n .

Remarque 9:

Ce corollaire est très fort car il nous donne l'expression des coefficients de la série entière. En particulier nous verrons ci-dessous qu'ils sont uniques.

3 Développement en série entière d'une fonction à variable réelle

Savoir faire :

- Savoir développer une fonction en série entière.
- Savoir trouver une solution développable en série entière d'une équation différentielle.

Depuis le début du chapitre, nous avons répondu à la question suivante : étant donné une suite de coefficients (a_n) , quelles sont les propriétés de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

Nous avons par ailleurs constaté que certaines fonctions comme $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto e^x$ pouvaient s'écrire sous forme de série entière.

En effet,

$$\forall x, |x| < 1, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

De même

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Peut-on écrire toute fonction sous forme de série entière ? Si oui, à quoi sont égaux les coefficients (a_n) et sur quel intervalle peut-on l'écrire comme série entière ?

Définition 3:

On dit qu'une fonction que $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est développable en série entière en 0 s'il existe une série entière

$$\sum a_n x^n(R) \text{ telle que } \forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

3.1 Unicité du développement en série entière

L'objectif de cette section est de déterminer l'expression des a_n si une fonction f est développable en série entière.

Théorème 6:

Si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est DSE en 0 de sorte que $\exists R > 0, \forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors

1. $f \in C^\infty(]-R, R[)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Le DSE est donc unique et donné par la série de Taylor.

Preuve :

On a déjà tout démontré avant !

Qu'est-ce que nous dit ce résultat ?

Le message essentiel de ce théorème est que si une fonction est développable en série entière alors les coefficients a_n du développement sont uniques et donnés par $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Remarque 10:

L'unicité d'un DSE est **très utilisé en exercice de concours** ! Notamment pour la recherche de solutions d'équations différentielles développables en série entière.

3.2 Les développements usuels

L'unicité des développements en série entière permet d'obtenir les développements en série entière usuels. En pratique tous les développements suivants peuvent être obtenus en calculant $f^{(n)}(0)$ pour la fonction f en question. Cependant ce calcul peut être fastidieux et il y a des moyens de contourner cela. Ce qui suit se décline sous la forme d'un gros exercice. Je donne les résultats des développements à connaître, je vous laisse les retrouver.

Pour $f(x) = e^x$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = e^x$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (R = +\infty).$$

Ainsi en utilisant la partie réelle et imaginaire de e^{ix} , ou que $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ démontrez que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (R = +\infty).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (R = +\infty).$$

On rappelle que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad (R = 1).$$

En déduire les développements en série entière de $\frac{1}{1+x}$.

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (R = 1).$$

Enfin, on a également pour $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!} \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + \dots, \quad (R=1). \end{aligned}$$

Remarque 11: Le lien entre les DL et les séries entières

Remarquez que les expressions des séries entières sont exactement ce que vous avez vu sur les DL. La force de la théorie présente est qu'on écrit la fonction sous forme de DL infini et pas uniquement sur un voisinage de 0 comme c'était le cas pour les DL.

3.3 Résolution d'une équation différentielle linéaire

L'objectif de cette section est de voir comment pour certaines équations différentielles on peut déterminer une solution sous forme de série entière. Consacrons-nous à l'équation :

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

Le raisonnement est un raisonnement par analyse/synthèse :

- **Analyse** : On suppose qu'il existe une solution développable en série entière et on montre qu'elle est unique en déterminant l'expression des coefficients.
- **Synthèse** : On démontre l'existence et on détermine l'intervalle d'existence.

Analyse : On cherche $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution sous la forme d'une série entière de rayon R .

On peut dériver cette série entière sur $] -R, R[$ (théorème du cours) et les deux premières dérivées sont

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On injecte dans l'équation :

$$x(x-1) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

On développe $x(x-1)$ comme $x^2 - x$ et on sépare en deux séries entières :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

On effectue les changements d'indice pour obtenir partout x^n :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

On ajoute les premiers termes (qui sont tous nuls!) pour avoir le même indexation des séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-(n+1) n a_{n+1} + (n+1)^2 a_n) x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on a

$$\forall n \geq 0, \quad na_{n+1} = (n+1)a_n.$$

On en conclut que $a_0 = 0$ par récurrence immédiate que

$$\forall n \geq 1, a_n = na_1.$$

$$\text{Donc } y(x) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n.$$

Synthèse : Réciproquement c'est une solution : on l'a construite pour ! Par le critère de d'Alembert, on peut montrer que son rayon est 1 (faites-). On a donc des solutions développables en séries entières uniquement sur $] -1, 1[$ sauf si $a_1 = 0$ (on retrouve la solution nulle sur \mathbb{R}).

Remarque 12:

On peut calculer la somme :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad y(x) &= a_1 x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= a_1 x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)', && \text{par théorème de dérivation des séries entières} \\ &= a_1 x \left(\frac{1}{1-x} \right)', && \text{(série géométrique)} \\ &= a_1 \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$