Numéro de table :	Promotion 2018

ISUPFERE – EXAMEN DE MATHEMATIQUES

DUREE : 1H00

Cet énoncé doit être remis avec la copie : merci de bien veiller à inscrire votre numéro de table sur l'énoncé.

EXERCICE 1

Une entreprise souhaite réaliser un motif décoratif pour sa communication (voir Figure 1) : elle cherche donc à en calculer la surface. La forme de ce motif est déterminée par les courbes C_f et C_g, représentatives respectivement des fonctions f et g, définies respectivement par :

Pour tout réel x de $[0; 1]$, $\quad f(x) = (1-x)e^{3x} \quad$ et $\quad g(x) = x^2 - 2x + 1$

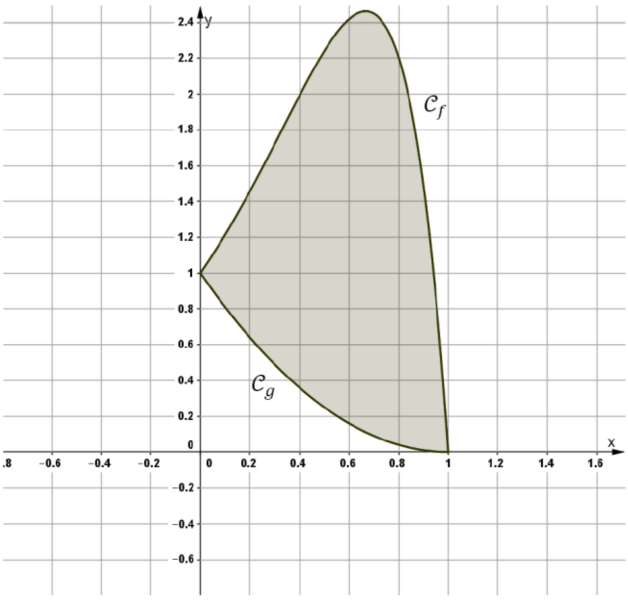


Figure 1 : Représentation du motif décoratif

1. Vérifier que les points $A(0,1)$ et $B(1,0)$ appartiennent bien aux deux courbes C_f et C_g,

2. a. Calculer la fonction dérivée f'.

   b. Etudier sur $[0; 1]$, le signe de f', puis donner le tableau de variation de f. Préciser les valeurs utiles.

   c. En déduire, les coordonnées du sommet de la courbe C_f.

2. **a.** Calculer la fonction dérivée seconde f''.

b. La courbe C_f, a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en déduire ses coordonnés

3. **a.** Calculer $\int_0^1 g(x)dx$

b. Repérer (hachurer) sur la Figure 2 ci-dessous ce que représente graphiquement cette grandeur.

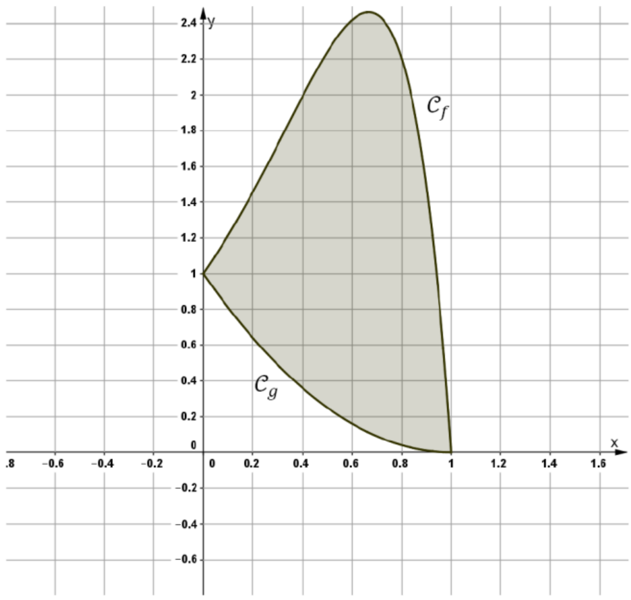


Figure 2

4 On se propose maintenant de calculer $\int_0^1 f(x)dx$. Pour cela, une intégration par parties est nécessaire. On rappelle donc que, pour u et v sont deux fonctions continues, intégrables sur $[0; 1]$:

$$\int_0^1 u\,(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int_0^1 u'(x)v(x)dx$$

a. En déduire que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{e^3-4}{9}$

b. Repérer hachurer sur la Figure 3 ci-après ce que représente graphiquement cette grandeur.

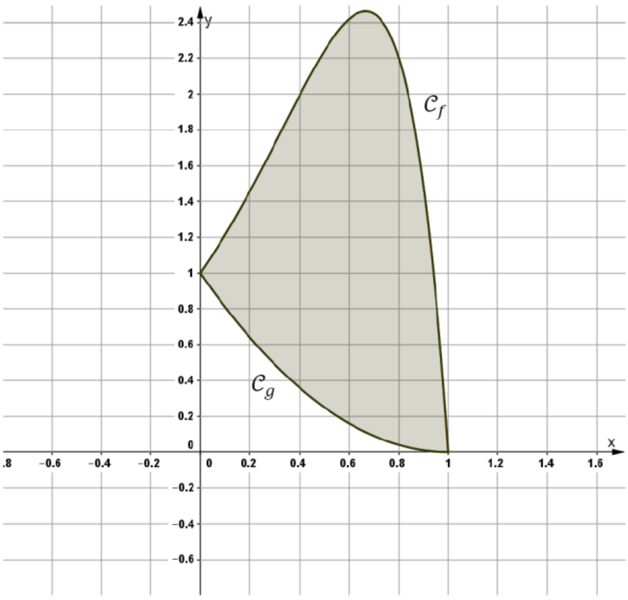


Figure 3

5. Déduire des questions 3 et 4, l'aire grisée du motif déterminé par les courbes C_f et C_g.

EXERCICE 2

Soit la suite numérique (U_n) définie sur N par :

$$U_0 = 2 \qquad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad U_{n+1} = \frac{2}{3}.U_n + \frac{1}{3}.n + 1$$

1. **a.** Calculer U_1, U_2, U_3, U_4

   b. La suite U_n vous semble-t-elle croissante ou décroissante ?

2. **a.** En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$U_n \leq n + 3$$

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

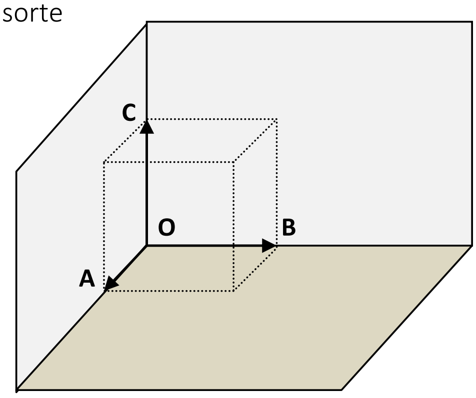
$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}(n + 3 - U_n)$$

   c. Que peut-on déduire sur la monotonie de la suite (U_n) : est-elle croissante ou décroissante ?

EXERCICE 3

Un catadioptre est un dispositif optique formé de 3 miroirs disposés en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ est un repère orthonormé.



Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC).

Les rayons lumineux sont modélisés par une droite $d_i$de vecteur directeur $\overrightarrow{v_i}(a; b; c)$.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux

Soit un rayon lumineux incident de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$:

- lorsque ce rayon est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v'}(a; b; -c)$;
- lorsque ce rayon est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v'}(-a; b; c)$;
- lorsque ce rayon est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v'}(a; -b; c)$.

1. Propriété des catadioptres

En utilisant les règles de réflexion précédentes, déterminer les vecteurs directeurs des réflexions successives du rayon incident représenté par la droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}(-2; -1; -1)$ qui vient frapper le plan (OAB), puis le plan (OBC) et finalement le plan (OAC). Pour cela, on déterminera successivement :

a. $\vec{v}_2$, un vecteur directeur du rayon réfléchi par le plan (OAB) issu du rayon de vecteur directeur $\vec{v}_1$;
b. $\vec{v}_3$, un vecteur directeur du rayon réfléchi par le plan (OBC) issu du rayon de vecteur directeur $\vec{v}_2$;
c. $\vec{v}_4$, un vecteur directeur du rayon réfléchi par le plan (OAC) issu du rayon de vecteur directeur $\vec{v}_3$.
d. Comparer le rayon incident $\vec{v}_1$ et et le rayon réfléchi $\vec{v}_4$. Qu'en déduisez-vous ?

2. Etude des réflexions

Rappel : représentation paramétrique d'une droite et équation cartésienne d'un plan

Soient I le point de coordonnées (x_i, y_i, z_i) et $\vec{v}(a; b; c)$ un vecteur directeur. La droite d de vecteur directeur $\vec{v}$ et passant par I peut être représentée sous la forme du système d'équations paramétriques suivants :

$$d : \begin{cases} x = x_I + a.t \\ y = y_I + b.t \\ z = z_I + c.t \end{cases} \text{ où } t \text{ est un paramètre réel.}$$

De plus, le plan normal à $\vec{v}$ et passant par I est défini par l'équation cartésienne suivante :

$$a.x + b.y + c.z = d \text{ avec } d = a.x_I + b.y_I + c.z_I$$

a. Réflexion de la droite $\boldsymbol{d_2}$ sur le plan $(\boldsymbol{OBC})$

Le rayon lumineux représenté par la droite d_1 est réfléchi par le plan (OAB) au point d'incidence I_1 : le rayon réfléchi est représenté par la droite d_2.

- Donner une représentation paramétrique de la droite d_2 de vecteur directeur $\vec{v}_2$ et passant par le point $I_1(2; 3; 0)$
- Donner un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne du plan (OBC).
- Calculer le point d'intersection I_2 du plan (OBC) et de la droite d_2.

b. Réflexion de la droite $\boldsymbol{d_3}$ sur le plan $(\boldsymbol{OAC})$

On note d_3 la droite de vecteur directeur $\vec{v}_3$ et passant par I_2, représentant le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). En utilisant la méthode utilisée précédemment, déterminer le point d'intersection I_3, de la droite d_3 et du plan (OAC).

3. Etude du trajet de la lumière

On donne le vecteur $\vec{u}(1; -2; 0)$ et P le plan défini par les droites d_1 et d_2

a. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan P
b. Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?
c. Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan ?