Nom:

Prénom:

ISUPFERE

TEST DE POSITIONNEMENT DE MATHÉMATIQUES

Aucun document, pas de calculatrice, ni téléphone, aucun dispositif électronique

L'ensemble du sujet et les brouillons seront ramassés à la fin de l'épreuve

(1 heure 30 minutes)

Partie I
EXERCICES
7 pts

1. *Arithmétique et sport*
Deux cyclistes effectuent des tours de piste. Le premier met 3 mn, le second 3 mn 20 s pour chaque tour. Ils partent ensemble sur la ligne de départ. Au bout de combien de temps se retrouveront-ils à nouveau tous les deux sur cette ligne de départ?

2. *Déterminer les diviseurs communs à deux entiers naturels*
Si on divise 4373 et 826 par un même entier naturel non nul n, on obtient respectivement 8 et 7 pour restes. Quel est ce nombre n?

3. *Utiliser les congruences dans la vie courante*
Quelle heure indique l'horloge?

a) 113 heures après avoir indiqué 2 heures?
b) 156 heures avant d'indiquer 6 heures?

4. *Établir qu'un entier divise un autre entier*
Démontrer que la somme de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 3

5. *Déterminer le reste d'une division*
n désigne un entier naturel non nul. Quel est le reste dans la division euclidienne:
a) de $(n + 2)^2$ par $n + 4$? **b)** de $2n^2 + n$ par $n+1$

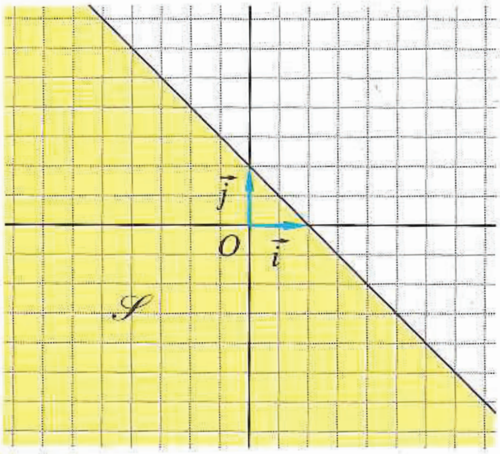
6. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ -x+2y-4=0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x+5y+8=0 \\ x+7y-15=0 \end{cases}$;

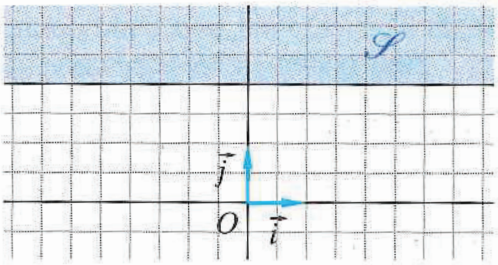
c) $\begin{cases} 2x+2y-15=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 3x+y-25=0 \\ x-6y+35=0 \end{cases}$.

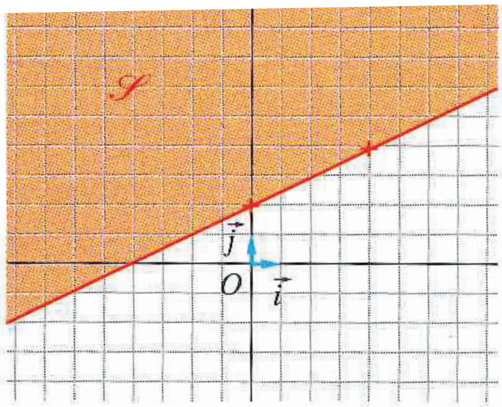
7. Les graphiques suivants étant donnés, associer à chacun d'eux une inéquation dont l'ensemble solution sera les couples de coordonnées des points de la partie coloriée du plan (ne pas oublier les droites coloriées).

a)

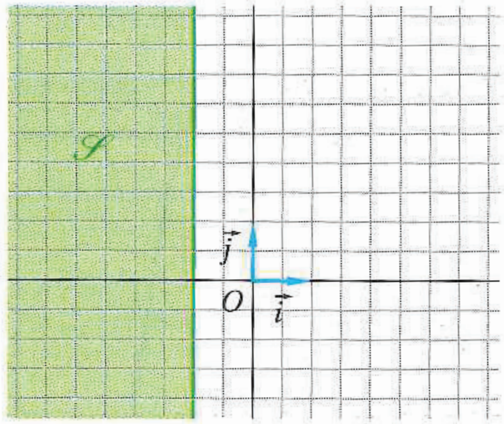


b)





d)



Partie II

15 pts

Répondre par VRAI ou FAUX

Toute réponse fausse entraîne des points négatifs mais l'absence de réponse n'est pas pénalisée

1. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln(\sqrt{x})},$$

D son ensemble de définition et (C) sa courbe représentative.

a) On a : $D =]0\,;+\infty[$.

b) La courbe (C) admet une droite asymptote en $+\infty$.

c) Pour tout $x \in D$, on a : $f(x) < \frac{x}{2}$.

d) Pour tout $x \in D$, on a : $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$.

a)	
b)	
c)	
d)	

2. On rappelle que $2 < e < 3$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{e^x + 1}.$$

a) La fonction f est paire.

b) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

c) On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -\frac{3}{4}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{1}{4}$.

d) On a : $\int_0^2 f(x)\,dx = \ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$.

a)	
b)	
c)	
d)	

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose $z = \cos x + i \sin x$ et $z' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + i \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

a) $z = z'$.

b) $z + z'$ est réel.

c) $z - z'$ est imaginaire pur.

d) $zz' = 1$.

e) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = 2 \arg z$.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	

4. Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe 4 et l'application F qui, à tout point M distinct de A, d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$, d'affixe z' donnée par

$$z' = \frac{z - 4}{4 - \bar{z}} \qquad (1).$$

a) Le point B d'affixe $1 + 3i$ a pour image par F le point B' d'affixe i.

b) Tous les points de la droite d'équation $x = 4$ privée du point A ont la même image par F.

a)	
b)	

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

a) $x^2 + 2x + 4 = (x + 2)^2$.

b) $-x^2 + 3x - 2 = (1 - x)(2 - x)$.

c) $x^2 - 2x + 4 > 0$.

d) $3 - 2x - x^2 < 0$.

e) $-1 + x - x^2 < 0$.

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	

6. Soit P, Q, R trois points non alignés du plan. I est le barycentre de $\{(Q, 2), (R, -3)\}$, J est le barycentre de $\{(P, 1), (R, -3)\}$ et K est le barycentre de $\{(Q, 1), (P, m)\}$ où m est un réel différent de -1.

a) $\overrightarrow{PI} = 2\overrightarrow{QP} - 3\overrightarrow{RP}$.

b) $\overrightarrow{PI} = 2\overrightarrow{QJ}$.

c) La droite (PI) est parallèle à la droite (QJ).

d) Il existe une unique valeur de m telle que (PI) soit parallèle à (RK).

e) Pour $m = \dfrac{1}{2}$, (PI) et (QJ) sont parallèles à (RK).

a)	
b)	
c)	
d)	
e)	