A2019 – MATHS-PHY

GEI-UNIV

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH, ISAE-SUPAERO,
ENSTA PARISTECH, TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY, IMT Atlantique,
ENSAE PARISTECH, CHIME PARISTECH.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ARTS et METIERS PARISTECH,
ESPCI PARIS, SUPOPTIQUE.

Admission par voie universitaire

ÉPREUVE COMMUNE DE MATHÉMATIQUES et PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures.

L'emploi de tous documents (dictionnaires, imprimés, ...) et de tous appareils (traductrices, calculatrices électroniques, ...) est interdit dans cette épreuve.

Cette épreuve est un questionnaire à choix multiples.
Les questions sont numérotées de 1 à 20 pour l'épreuve de mathématiques.
et de 21 à 40 pour l'épreuve de physique.

Chaque question peut admettre, de façon variable, entre une et cinq réponses correctes.
Exprimer les réponses exactes en noircissant la ou les cases correspondantes.
Toute réponse incorrecte sera pénalisée.

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Respectez scrupuleusement les consignes de remplissage des cases du document réponse.

QCM - Mathématiques

Questions 1 à 20

$f(x,y) = (x+2y,\ 2x+y)$

$f'(x,y) = \left((x+2y) + \frac{1}{2}x + y,\ x + \frac{1}{2}y + 2x+y \right)$

$\left(\frac{3}{2}x + 3y,\ 3x + \frac{3}{2}y \right)$

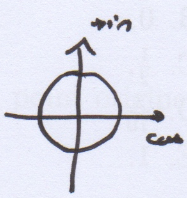
1. La matrice réelle $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
   A. n'est pas inversible ?
   B. a pour inverse, $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$?
   C. a pour inverse, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$?
   D. a pour inverse, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?
   E. a une infinité d'inverses ?

2. On donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x.e^{x^2}$. Que vaut $f'(1)$,
   A. 0 ?
   B. 1 ?
   C. e ?
   D. $2e$?
   E. $3e$?

3. On lance 10 fois un dé à 6 faces bien équilibré.
   Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 « 6 » ?
   A. $\binom{3}{10}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^7$,
   B. $(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^7$,
   C. $\frac{3}{10}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^7$,
   D. $3(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^7$,
   E. $\frac{3}{10}\frac{1}{6}$.

4. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   Alors,
   A. f est positive sur $\mathbb{R}$?
   B. f est périodique sur $\mathbb{R}$?
   C. f est continue sur $\mathbb{R}$?
   D. f est dérivable sur $\mathbb{R}$?
   E. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?



5. On considère $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^3}$
Alors,
   A. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge ?
   B. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge ?
   C. $\int_0^{1} f(x)dx$ converge ?
   D. $\int_0^{1} f(x)dx$ diverge ?
   E. $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge ?

6. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \cos(n^2 x)$,
   A. converge simplement sur $\mathbb{R}$?
   B. converge absolument sur $\mathbb{R}$?
   C. converge normalement sur $\mathbb{R}$?
   D. est continue sur $\mathbb{R}$?
   E. est dérivable sur $\mathbb{R}$?

7. On note R_1 le rayon de converge de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, R_2 celui de $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$, et R celui de $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$.
On a toujours,
   A. $R < R_1 + R_2$?
   B. $R \leq R_1 + R_2$?
   C. $R = R_1 + R_2$?
   D. $R \geq R_1 + R_2$?
   E. $R > R_1 + R_2$?

8. Un lot de 100 dés contient 10 dés pipés qui font « 6 » une fois sur deux. On choisit un dé au hasard, on le lance et on obtient « 6 ». Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
   A. $\frac{1}{4}$,
   B. 0,
   C. $\frac{1}{2}$,
   D. $\frac{1}{10}$,
   E. 1.

$\frac{1}{10}$: $\frac{1}{2}$ P, $\frac{1}{2}$ NS ; $\frac{9}{10}$: $\frac{1}{6}$ 6, $\frac{5}{6}$ W

$\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$

9. Dans $\mathbb{R}[x]$, le P.G.C.D. des polynômes $x^3 - x^2$ et $x^3 - 3x + 2$, est :
   A. x ?
   B. $x - 1$?
   C. $x - 2$?
   D. 1 ?
   E. $x^3 - 3x + 2$?

$(x-1)(x$

10. Pour $n \geq 1$, on définit $S_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} e^{k/n}$. Alors,

    A. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$?

    B. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$?

    C. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e - 1$?

    D. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e$?

    E. la suite (S_n) n'admet pas de limite ?

11. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par :

    $$u(x, y, z) = (x + y - 2z, y - z, x - y)$$

    Alors,

    A. u est inversible ?

    B. $\ker(u) = \mathbb{R}(1, 1, 1)$ et $\text{rang}(u) = 1$?

    C. $\ker(u) = \mathbb{R}(1, 1, 1)$ et $\text{rang}(u) = 2$?

    D. $\ker(u) = \mathbb{R}(1, 1, 1) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ et $\text{rang}(u) = 1$?

    E. $\ker(u) = \mathbb{R}(1, 1, 1) \oplus \mathbb{R}(1, 1, 0)$ et $\text{rang}(u) = 2$?

12. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère la norme $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$. A quoi « ressemble » la boule unité fermée ?

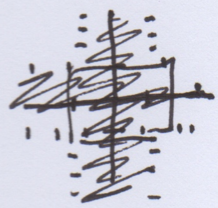
    A. à un disque,

    B. à un carré,

    C. à un cercle,

    D. à une parabole,

    E. à une ellipse.



Topologie

13. Que vaut $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} \cos(x)\, dx$,

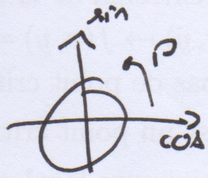
    A. $+\infty$?

    B. 0 ?

    C. $\frac{1}{2}$?

    D. 1 ?

    E. $\cos(\pi/3)$?



14. Dans l'espace à 3 dimensions, quelle est la distance du point origine $(0, 0, 0)$ au plan P d'équation $x + y + z - 5 = 0$?

    A. 0,

    B. $\sqrt{\frac{5}{3}}$,

    C. $\frac{25}{9}$,

    D. $\frac{5}{3}$,

    E. $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

15. On considère l'équation différentielle $x'' - 2x' - 3x = t$, où $t \in \mathbb{R}$ est la variable, et x la fonction inconnue. Les solutions de cette équation sont de la forme :
    A. $t \mapsto C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{3}t + \frac{2}{9}$?
    B. $t \mapsto C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{3}t$?
    C. $t \mapsto C_1 \cos(t) + C_2 \cos(3t) - \frac{1}{3}t + \frac{2}{9}$?
    D. $t \mapsto C_1 \cos(t) + C_2 \cos(3t) - \frac{1}{3}t$?
    E. $t \mapsto C_1 e^{-t} + C_2 \cos(3t)$?

16. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes ayant la même densité de probabilité donnée par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
    On note g la densité de probabilité de $X + Y$. Pour $x \geq 0$, on a :
    A. $g(x) = 2e^{-x}$?
    B. $g(x) = 2e^{-2x}$?
    C. $g(x) = e^{-x^2}$?
    D. $g(x) = e^{-x}$?
    E. $g(x) = xe^{-x}$?

17. Que vaut $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} x^2 \, dx \, dy$?

$\int \frac{2^3}{3} \, dy$

    A. 4,
    B. $\frac{4}{3}$,
    C. $\frac{8}{3}$,
    D. $\frac{16}{3}$,
    E. $\frac{32}{3}$.

D

18. On s'intéresse aux extrema de la fonction,
    $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = e^x + xy$

$\partial_x f = xe^x + y$

$\partial_y f = x$

D

    A. Il n'y a pas de point critique ?
    B. $(0, -1)$ est un point critique ?
    C. f a un minimum local en $(0, -1)$?
    D. f a un maximum local en $(0, -1)$?
    E. f n'a pas d'extremun local $(0, -1)$?

$\partial^2_{y^2} f = 0$

$\partial^2_{xy} f = 1$

$\cancel{\partial^2_{x^2} f = x^2 e^x}$

$f(0,0) = 1$

$f(0,-1) = 1$

$f(1;0) = e+1$

$f(0,-2) =$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

Rg chaîne

19. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 $\quad (x, y) \mapsto f(x, y)$

On considère, $\quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (u, v) \mapsto \mathbf{F}(u, v) = f(u + v, u - v)$.

Que vaut $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v}(u, v)$?

A. $\frac{\partial f}{\partial x}(u + v, u - v)$,

B. $\frac{\partial f}{\partial y}(u + v, u - v)$,

C. $\frac{\partial f}{\partial x}(u + v, u - v) - \frac{\partial f}{\partial y}(u + v, u - v)$, C

D. $\frac{\partial f}{\partial x}(u + v, u - v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u + v, u - v)$,

E. $\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u, v)$.

20. On pose,

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ixt} dx.$$

Alors,

A. $\varphi'(t) = -\varphi(t)$?

B. $\varphi'(t) = \varphi(t)$?

C. $\varphi'(t) = i\varphi(t)$?

D. $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$?

E. $\varphi'(t) = t\varphi(t)$

FIN de l'ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES

$x^2 + y^2$

$\partial x \quad 2x$

$\partial y \quad 2y$

$\partial xx \quad 2 \quad \partial yy \; 2.$

$\partial xy \quad 0$

Hessienne

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ → Pt critique en 0 (minimum)