



ECOLE DES PONTS PARISTECH, ISAE-SUPAERO,
ENSTA PARIS, TELECOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ETIENNE, MINES NANCY, IMT ATLANTIQUE,
ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH – PSL,
ECOLE POLYTECHNIQUE, ARTS et METIERS,
ESPCI PARIS, SUPOPTIQUE.

Admission par voie universitaire

EPREUVES de MATHÉMATIQUES et de PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures.

L'emploi de tous documents (dictionnaires, imprimés, ...) ou de tous appareils (traductrices, calculatrices électroniques, ...) est interdit dans cette épreuve.

Cette épreuve est un questionnaire à choix multiples.

Les questions sont numérotées de 1 à 20 pour l'épreuve de mathématiques et de 21 à 40 pour l'épreuve de physique.

Chaque question peut admettre, de façon variable, entre une et cinq réponses correctes.

Dans toutes les questions vous indiquerez les assertions correctes.

Exprimer les réponses exactes en noircissant la ou les cases correspondantes.

Respectez scrupuleusement les consignes de remplissage des cases du document réponse.

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

L'énoncé de cette épreuve comporte 18 pages de texte.

QCM de Mathématiques

Questions 1 à 20

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{I} =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}.$$

Indiquer les réponses correctes.

- A. f est concave sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$.
- B. f est convexe sur $]0; \frac{1}{3}[$.
- C. Pour tout x appartenant à \mathbb{I} on a $f(x) < 0$.
- D. L'équation $f(x) = -1$ possède une unique solution dans $]1; +\infty[$.
- E. L'équation $f(x) = -1$ possède une unique solution dans $]0; \frac{1}{3}[$.

2. Soient $f(x), g(x), h(x)$ et $k(x)$ les fonction définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x \cos(x), \quad g(x) = (1-x) \sin(x), \quad h(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad k(x) = f(x) - g(x)$$

- A. Les courbes représentatives de f et de g ont la même tangente au point d'abscisse $x = 0$.
- B. La courbe représentative de h est au-dessous de sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0.
- C. La courbe représentative de k est au-dessus de sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0.
- D. La courbe représentative de k est au-dessus de la parabole d'équation $y = x^2$, au voisinage du point d'abscisse 0.
- E. Soit $p(x) = f(x).g(x)$, le produit des fonctions f et g . Alors, $(p)'''(0) > -1$.

3. Soit a un nombre réel et soit f la fonction définie sur $[-1; +1]$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}}{x},$$

pour $x \in [-1; 0[$ et $f(x) = ax$, pour $x \in [0; 1]$, alors :

- A. f est continue en 0 quelle que soit la valeur de a .
- B. Il existe au moins une valeur de a pour laquelle f est continue en 0.
- C. f est dérivable en 0 quelle que soit la valeur de a .
- D. Il existe au moins une valeur de a pour laquelle f est dérivable en 0.
- E. f est dérivable en 0 si $a = -2$.

4. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I \subset]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(3x) - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{2}.$$

- A. f de l'intervalle $[\frac{1}{6}; +\infty[$ vers $] -\infty; 0]$ est injective.
- B. f de l'intervalle $[\frac{1}{3}; +\infty[$ vers $] -\infty; 0]$ est injective.
- C. f de l'intervalle $[\frac{1}{6}; +\infty[$ vers $] -\infty; 0]$ est surjective.
- D. f de l'intervalle $[\frac{1}{3}; +\infty[$ vers $] -\infty; 0]$ est surjective.
- E. f de l'intervalle $[\frac{1}{2}; +\infty[$ vers $] -\infty; 0]$ est surjective.

5. Soit f la fonction définie sur $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y > 0\}$ par :

$$f(x; y) = \ln(x - 2y) - 3x^2 + 4y + \ln 2.$$

- A. f est convexe sur D .
- B. f est concave sur D .
- C. f présente un point critique (ou stationnaire).
- D. Pour tout $(x; y) \in D$, on a $f(x; y) > -1$.
- E. Pour tout $(x; y) \in D$, on a $f(x; y) < 0$.

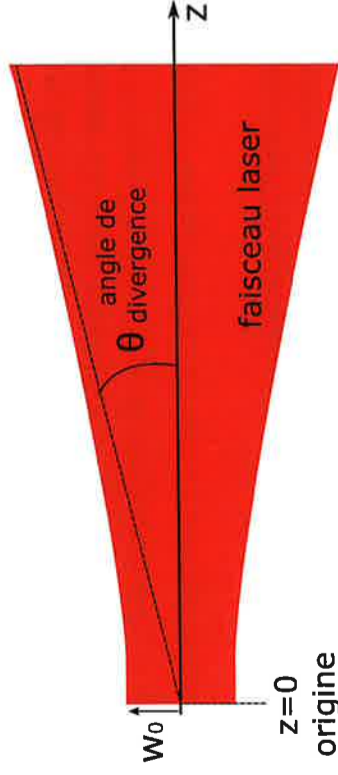
6. Soit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n + \frac{7}{2}$.

- A. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
- B. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge sans limite.
- C. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est ≥ 2 .
- D. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite = 0.
- E. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = -3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{3}{u_n})$.

- A. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- B. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- C. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- D. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
- E. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

40. On considère le faisceau laser représenté ci-dessous :



Il s'agit d'un faisceau limité spatialement se comportant comme un faisceau divergent à grande distance. L'angle de divergence est donné par l'expression $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ où λ est la longueur d'onde du laser et w_0 son paramètre de taille minimale à son origine ($z = 0$). La valeur de l'angle de divergence qui sera utilisée dans cette question est $\theta = 1 \text{ mrad}$

- La diffraction permet de décrire la propagation du faisceau à partir de son origine.
- Du point de vue des ondes électromagnétiques, un faisceau laser est une onde sphérique.
- Pour un laser rouge, la taille du faisceau w_0 est de l'ordre de grandeur de $200 \mu\text{m}$
- Le laser émet une puissance $P = 1 \text{ mW}$ (petit pointeur laser), après une propagation sur une distance de 1 m , la répartition surfacique de la puissance est d'environ 300 W/m^2
- La lune se situe à une distance de 384400 km de la Terre. Si le faisceau laser vise la lune, il aura un diamètre d'environ 800 m à la surface lunaire.

FIN de l'ÉPREUVE de PHYSIQUE

8. On considère les séries $S = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $T = \sum_{n \geq 0} n \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

- Ces deux séries sont de même nature.
- T diverge vers $+\infty$.
- Ces deux séries convergent et $S < T$.
- T converge et la somme est $\leq \frac{1}{3}$.
- T converge et la somme est $\leq \frac{1}{2}$.

9. On considère la série $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} \binom{2n-1}{n!}$.

- Cette série diverge.
- Cette série converge et sa somme est $\leq e$.
- Cette série converge et sa somme est $\geq e$.
- La série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n!}{n^2} u_n\right)$ converge.
- La série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n!}{n^3} u_n\right)$ converge.

10. Dans un atelier, on découpe des pièces métalliques sur deux machines M_1 et M_2 . La machine M_1 découpe 60% des pièces et 7% de ces pièces sont défectueuses. La machine M_2 découpe 40% des pièces. 1,6% des pièces de la production totale ont été découpées par la machine M_2 et sont défectueuses. On prélève au hasard une pièce dans la production totale.

- Il y a une probabilité supérieure à 5% que la pièce soit défectueuse.
- Il y a une probabilité supérieure à 95% que la pièce ne soit pas défectueuse.
- Il y a une probabilité supérieure à 35% que la pièce ait été découpée par la machine M_2 et ne soit pas défectueuse.
- On constate que la pièce est défectueuse. Il y a alors une probabilité supérieure à 25% qu'elle ait été découpée par la machine M_2 .
- On constate que la pièce est défectueuse. Il y a alors trois fois plus de chances qu'elle ait été découpée par la machine M_1 que par la machine M_2 .

11. Soit $(X; Y)$ un couple de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé Ω muni de la probabilité P , tel que :

$$X(\Omega) = \{0; 1\}; Y(\Omega) = \{-1; 0\};$$

$$P(X = 0; Y = 0) = 6.P(X = 1; Y = -1);$$

$$P(X = 1; Y = 0) = 2.P(X = 1; Y = -1);$$

et

$$P(X = 0; Y = -1) = 3.P(X = 1; Y = -1).$$

Alors,

- A. $P(X = 0) > P(Y = 0)$.
- B. $P(X = 0) = P(X = 1)$.
- C. X et Y sont indépendantes.
- D. $P(X + Y = 0) > \frac{1}{2}$.
- E. La variance de X et supérieure ou égale à la variance de Y.

12. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que X suit une loi binomiale de paramètres $(6; \frac{3}{4})$ et Y suit une loi binomiale de paramètres $(8; \frac{1}{4})$.

- A. $\text{Variance}(X) > \text{Variance}(Y)$.
- B. $P(Y = 2) > P(X = 6)$.
- C. $P(Y = 2) < 2.P(X = 6)$.
- ~~D.~~ $\text{Espérance}(4X - 9Y) < 0$.
- E. $\text{Variance}(4X) = \text{Variance}(3Y)$.

13. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, si $1 \leq x \leq 4$ et $f(x) = 0$ pour tout autre valeur de x.

On admet que f peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire X continue sur \mathbb{R} . F_X désigne la fonction de répartition de X.

- A. $\text{Espérance}(X) > 3$.
- B. $\text{Variance}(X) < 1$.
- ~~C.~~ $F_X(\frac{9}{4}) < \frac{1}{3}$.
- D. La probabilité de l'événement $X > \frac{9}{4}$ est supérieure à $\frac{1}{3}$.
- ~~E.~~ La probabilité de l'événement $X \leq \frac{16}{9}$, sachant que l'événement $(X \leq \frac{9}{4})$ est réalisé, est supérieure à $\frac{1}{3}$.

14. On considère les séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \sqrt{n} x^n, \tag{1}$$

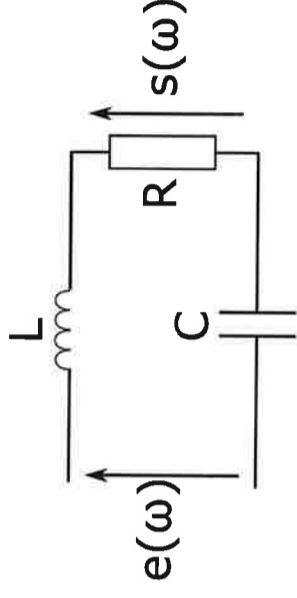
$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+1}} x^n, \tag{2}$$

4

38. On considère une particule quantique de masse m piégée dans un puits de potentiel unidimensionnel infini de largeur l :

- A. Dans le puits, la composante spatiale de la fonction d'onde associée à un état stationnaire d'énergie quantifiée E_n est de la forme $\psi_n(x) = Ae^{k_n x} + Be^{-k_n x}$, A et B étant des constantes d'intégration et $k_n = \sqrt{2mE_n}/\hbar$.
- B. La particule étant complètement au repos, l'énergie du niveau fondamental est nulle.
- C. Dans un puits carré, les énergies quantifiées sont proportionnelles à n^2 , n étant le nombre quantique (entier) associé à chaque niveau d'énergie.
- D. La longueur d'onde de Broglie associée à une particule piégée d'énergie E_n est $\lambda_n = \frac{2l}{n}$.
- E. La probabilité que la particule s'échappe du puits par effet tunnel est non-nulle.

39. On considère le filtre linéaire RLC ci-dessous :



La fonction de transfert d'un tel filtre s'écrit généralement $H(\omega) = \frac{s(\omega)}{e(\omega)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

Q est le facteur de qualité du filtre et ω_0 sa pulsation de coupure.

- A. L'impédance complexe du condensateur est $Z_C = jC\omega$
- B. La pulsation de coupure est $\omega_0 = \sqrt{LC}$
- C. Il s'agit d'un filtre passe-bande
- D. Le facteur de qualité du filtre est $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
- E. Il s'agit d'un filtre du premier ordre

36. Dans sa forme la plus générale, l'équation de Schrödinger unidimensionnelle régissant le comportement de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ associée à une particule de masse m s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t)$$

- A. $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$ est le terme correspondant à l'énergie mécanique
 B. L'unité de $\Psi(x, t)$ est le $m^{-1/2}$
 C. La fonction d'onde $\Psi(x, t)$ est une onde réelle se propageant dans l'espace (unidimensionnel dans ce cas).
 D. $\Psi(x, t)$ correspond à la probabilité de présence de trouver la particule à la position x à un instant t
 E. Si $\Psi_1(x, t)$ et $\Psi_2(x, t)$ sont solutions de l'équation de Schrödinger, alors $\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t)$ est également solution.

37. La loi de Planck caractérisant le rayonnement thermique donne la densité spectrale d'énergie électromagnétique d'un corps noir $\rho(\nu, T)$ à la température T et pour une fréquence ν . Son expression est donnée par la relation suivante :

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

c est la célérité de la lumière dans le vide, h la constante de Planck et k_B la constante de Boltzmann.

- A. L'unité de $\rho(\nu, T)$ est le $J.m^{-3}.Hz^{-1}$
 B. Pour une température T donnée, la longueur d'onde pour laquelle le corps noir rayonne un maximum d'énergie est donnée par la loi $\lambda_{max} = \frac{A}{T}$ avec $A = 2.898 \mu m.K$.
 Si $T = 300K$, un corps noir émet majoritairement dans l'infrarouge.
 C. La valeur de la constante de Planck est $h \approx 6.626 \times 10^{34} J.s$
 D. L'énergie d'un photon thermique est donnée par la relation de Planck-Einstein $E = h\omega$
 E. Cette loi n'est plus valide lorsque l'on s'intéresse à des corps dont la température est très basse (quelques Kelvins seulement).

et

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} x^n, \quad (3)$$

- A. Pour tout $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, ces trois séries convergent.
 B. Pour tout $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, au moins l'une de ces séries converge.
 C. Pour tout $x \in]-1; 1[$, ces trois séries convergent.
 D. Au moins l'une de ces séries est convergente pour tout $x \in [-1; 1]$.
 E. Au moins l'une de ces séries est convergente pour tout $x \in]-1; 1[$.

15. Soient I et J les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos(3t).e^{-t} dt,$$

et

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin(3t).e^{-t} dt.$$

Alors,

- A. $I \geq J$.
 B. $I \leq J$.
 C. $I \leq \frac{1}{10}$.
 D. $I \geq \frac{1}{10}$.
 E. Il existe un entier naturel n tel que $I + nJ = 1$.
16. Soit $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq 2x\}$. Soit $I = \iint_D \frac{x}{y} dx dy$.
- A. $I = \int_0^2 \frac{3}{8}.t dt$.
 B. $I = \int_0^1 \ln 2.t dt$.
 C. $I \leq \frac{1}{2}$.
 D. $I \geq \frac{1}{2}$.
 E. $I \geq \frac{3}{4}$.

17. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire dont M est la matrice représentative dans les bases canoniques respectives de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 .

- A. $\dim(\ker(f)) = 3$.
- B. $\dim(\text{Im}(f)) = 3$.
- C. f est injective.
- D. f est surjective.
- E. f est bijective.

18. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire dont M est la matrice représentative dans la base canonique de \mathbb{R}^3

- A. 3 est valeur propre de M .
- B. Le produit des valeurs propres de M est nul.
- C. La somme des valeurs propres de M est ≥ 4 .
- D. Le vecteur $\vec{u} = (0; 3; 3)$ est un vecteur propre de f .
- E. Toutes les valeurs propres de M sont positives.

19. On se place dans l'espace affine de dimension 3 muni du produit scalaire usuel et d'un repère orthonormé. On note O l'origine du repère de l'espace affine.

Soient \mathcal{D} la droite de vecteur directeur $\vec{u} = (3; -2; 1)$ passant par le point $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

et Δ la droite dont une équation paramétrique est :

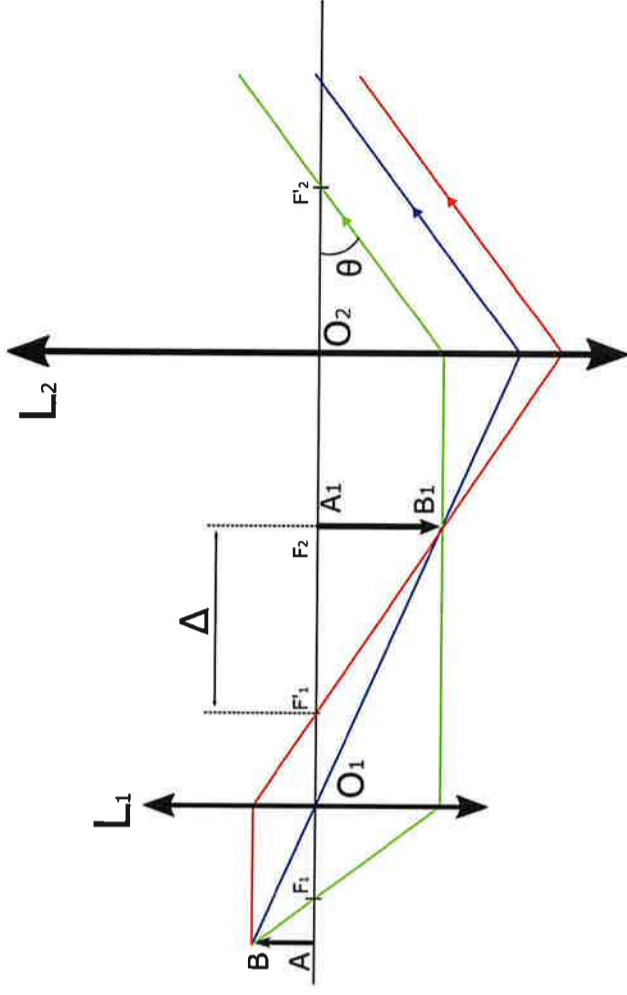
$$\begin{cases} x = -3 - 2t & 3t + 1 \\ y = 1 + t & t \in \mathbb{R} & -2t - 2 \\ z = 1 - t & t + 2 \end{cases}$$

- A. Les droites \mathcal{D} et Δ sont parallèles.
- B. Les droites \mathcal{D} et Δ sont coplanaires.
- C. La distance du point A à la droite Δ est ≥ 1 .
- D. La distance du point A au plan \mathcal{D} orthogonal à Δ , et passant par O , est inférieur ou égal à 3.
- E. Le plan dont une équation cartésienne est $x + y - z + 3 = 0$, contient la droite \mathcal{D} .

6



35. On considère ci-dessous le schéma optique d'un microscope destiné à réaliser l'image d'un objet noté AB



On note $f_1' = O_1F_1'$ et $f_2' = O_2F_2'$ les distances focales images respectives des lentilles L_1 et L_2 . On rappelle ci-dessous les formules de conjugaison et de grandissement pour une lentille mince convergente de distance focale OF' :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$$

A. L_1 est l'oculaire et L_2 l'objectif.

B. La distance de mise au point pour que l'image de l'objet AB soit nette est $\overline{F_1A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}$.

C. La vergence du système composé des deux lentilles L_1 et L_2 est

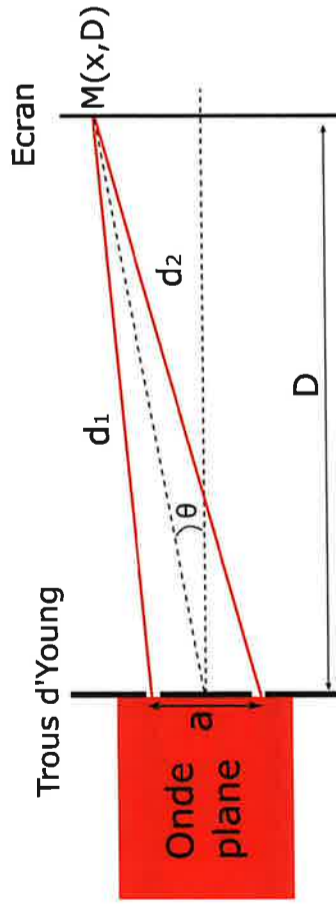
$$V = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{O_1O_2}{f_1'f_2'}$$

D. Le grandissement de la première lentille est $\gamma_1 = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{\Delta}{f_1'}$

E. La puissance du microscope est donnée par $P = \frac{\theta}{AB} = \frac{\Delta}{f_1'f_2'}$

15

34. Le dispositif interférométrique des trous d'Young est représenté sur la figure ci-dessous.



Une onde plane de longueur d'onde λ éclaire deux trous circulaires séparés d'une distance a et la figure d'interférences est observée sur un écran placé à une distance D des trous.

- A. Les ondes émises au niveau des trous sont planes.
- B. La différence de marche δ entre les deux trajets au point $M(x, D)$ sur l'écran est égale à $\delta = d_2 - d_1 \approx a \tan \theta$.
- C. Pour $\lambda = 0.5 \mu m$, $D = 2 m$, $a = 2 mm$, l'interfrange au niveau de l'écran est égale à $0.5 mm$.
- D. Si l'interféro-mètre est éclairé avec une superposition de deux ondes planes monochromatiques de longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 , on aura au niveau de l'écran un dispositif de franges correspondant à la longueur d'onde $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2) / 2$
- E. Avec la symétrie circulaire des trous, la figure d'interférences au niveau de l'écran est la suivante :



20. Soit l'équation différentielle $(E) : 2y' - y = -x^2 + 5x$ pour tout x réel.
- A. Pour toute fonction f solution de (E) on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
 - B.** Pour toute fonction f solution de (E) on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - C. Pour toute fonction f solution de (E) on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si $f(0) < 0$.
 - D. Il existe au moins une solution de (E) telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
 - E. Toute fonction f solution de (E) est convexe sur \mathbb{R} .

FIN de l'ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES



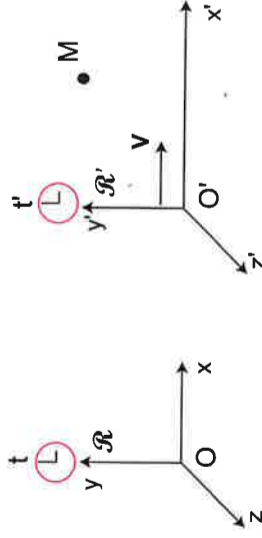
QCM de Physique

Questions 21 à 40

21. L'unité communément utilisée pour l'énergie est le Joule (J), les conversions proposées ci-dessous sont-elles vraies?

- A. $1 J = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
- B. $1 J = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$
- C. $1 J = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$
- D. $1 J \approx 6.24 \times 10^{18} \text{ eV}$
- E. $1 J = 1 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3$

22. On s'intéresse à la description du mouvement d'un point M depuis deux référentiels galiléens nommés \mathcal{R} et \mathcal{R}' . Le référentiel \mathcal{R}' est en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_x$ parallèle à l'axe Ox du référentiel \mathcal{R} .



On note (x, y, z, t) et (x', y', z', t') les coordonnées du point M dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

- A. Nous avons la relation $x = x' - Vt$
- B. En relativité galiléenne, nous avons $t \neq t'$
- C. On note \vec{v} le vecteur vitesse du point M dans \mathcal{R} et \vec{v}' le vecteur vitesse du point M dans \mathcal{R}' . Nous avons la relation $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$
- D. Lors d'un changement entre deux référentiels galiléens, la vitesse est une grandeur considérée comme absolue.
- E. Lors d'un changement entre deux référentiels galiléens, l'accélération du point M est une grandeur considérée comme relative à chaque référentiel.

23. On considère un solide de masse m déposé sur le plan incliné ci-dessous (faisant un angle θ par rapport à l'horizontale).

Il s'agit de s'intéresser au mouvement de ce solide en présence de frottements. La réaction par rapport à la surface est décomposée en ses composantes normale (\vec{N}) et tangentielle (\vec{T}). $\vec{P} = m\vec{g}$ est le poids appliqué au centre de gravité. On note respectivement f_s et f_d les coefficients de frottement statique et dynamique.

32. On considère un cylindre infini (orienté selon l'axe z) de rayon R uniformément chargé. Le champ électrique est exprimé en coordonnées cylindriques et nous allons nous intéresser à sa composante radiale $E_r(r, \theta, z)$

- A. Pour un cylindre uniformément chargé en volume de densité ρ et $r > R$, nous avons $E_r(r, \theta, z) = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}$
- B. Pour un cylindre uniformément chargé en volume de densité ρ et $r < R$, nous avons $E_r(r, \theta, z) = \frac{\rho R}{2\epsilon_0}$
- C. Pour un cylindre uniformément chargé en surface de densité σ et $r < R$, nous avons $E_r(r, \theta, z) = \frac{\sigma r}{R\epsilon_0}$
- D. Pour un cylindre uniformément chargé en surface et $r > R$ de densité σ , nous avons $E_r(r, \theta, z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
- E. Même si elle n'a pas été étudiée ici, le champ électrique possède également une composante $E_\theta(r, \theta, z)$

33. Dans un conducteur (conductivité électrique σ) et dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, les équations de Maxwell pour les champs électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0 & \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

On considère l'expression suivante pour le champ électrique d'une onde de pulsation ω à l'intérieur d'un métal $\vec{E}(z, t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[-j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \vec{u}_x$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ et on prendra la conductivité électrique du cuivre $\sigma = 6 \times 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

- A. Dans le système international d'unités : $1 \Omega = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$.
- B. L'équation régissant le comportement du champ électrique s'écrit :

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \mu_0 \sigma \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- C. Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ est polarisé selon l'axe Oz .
- D. Pour une onde de fréquence 1 GHz, l'épaisseur de peau δ est de l'ordre de grandeur de $2 \mu\text{m}$.
- E. Le champ magnétique associé à cette onde électromagnétique s'écrit $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1+j}{j\omega\delta} E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[-j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \vec{u}_y$.

29. On note $P(z)$ la pression atmosphérique de l'air (considéré comme un gaz parfait) à l'altitude z au dessus du niveau de la mer. On note $\rho(z)$ la masse volumique et M sa masse molaire. La pression atmosphérique au niveau de la mer est notée P_0 . La température est notée T .

A. La masse volumique s'exprime $\rho(z) = \frac{P(z)M}{RT}$

B. \vec{g} étant l'accélération de la pesanteur, la relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit $\text{grad}P = -\rho\vec{g}$

C. A température constante, la pression à l'altitude z est donnée par l'expression $P(z) = P_0 \exp\left(\frac{Mg}{RT}z\right)$.

D. Pour une température non constante suivant une loi du type $T(z) = T_0 - az$ (a étant une constante). La pression à l'altitude z est donnée par $P(z) =$

$$P_0 \left(1 - \frac{az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR}}$$

E. La quantité $\frac{RT}{Mg}$ est homogène à une longueur

30. Toutes les propositions ci-dessous sont liées au second principe de la thermodynamique, lesquelles sont vraies?

A. L'unité de l'entropie est le J/K .

B. L'entropie d'un système isolé est toujours nulle.

C. Au cours d'une transformation, l'entropie échangée avec l'extérieur n'est jamais négative

D. L'entropie est une grandeur extensive.

E. Au cours d'une transformation irréversible, l'entropie de création d'un système est positive.

31. Lors de la traversée de surfaces chargées et parcourues par des courants surfaciques, les équations de Maxwell prédisent les comportements suivants pour les champs électrique et magnétique :

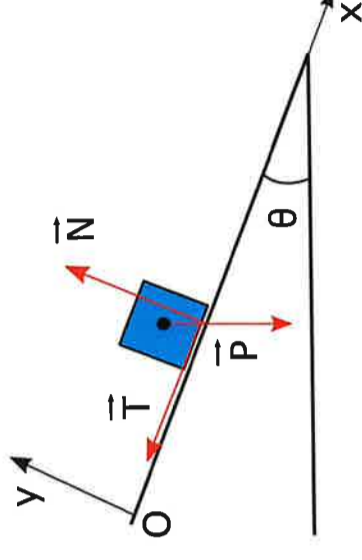
A. La composante tangentielle du champ électrique est nulle

B. La composante normale du champ magnétique est continue.

C. La composante tangentielle du champ magnétique est discontinue

D. La composante tangentielle du champ électrique est continue

E. La composante normale du champ électrique est continue.



A. D'après le schéma, la résultante des forces est égale à $\vec{P} + \vec{N} - \vec{T}$.

B. Nous avons généralement $f_s \geq f_d$

C. En régime de non-glisserment, la valeur limite que peut prendre l'angle θ est $\theta_l = \arctan f_d$

D. En régime de non-glisserment, la loi de Coulomb s'écrit $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$

E. En régime de non-glisserment, nous avons $\|\vec{N}\| = mg \cos \theta$ et $\|\vec{T}\| = mg \sin \theta$

24. On considère le même solide que dans la question précédente mais cette fois-ci, le plan est horizontal ($\theta = 0$) et le solide est animé d'une vitesse initiale $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ à l'instant $t = 0$.

A. Dans ce cas la composante normale de la réaction à la surface est nulle $\vec{N} = \vec{0}$.

B. L'application de la seconde loi de Newton permet d'écrire $m\vec{a} = \vec{T}$

C. La loi de Coulomb s'écrit $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$

D. Le solide va s'arrêter à la coordonnée $x = \frac{2f_d g}{v_0^2}$ à l'instant $t = \frac{f_d g}{v_0}$

E. Le solide va s'arrêter à la coordonnée $x = \frac{v_0^2}{2f_d g}$ à l'instant $t = \frac{v_0}{f_d g}$

25. On considère deux référentiels $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $\mathcal{R}'(O', \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$. \mathcal{R} est un référentiel galiléen et \mathcal{R}' est en mouvement de translation rectiligne non-uniforme le long de l'axe x caractérisé par une vitesse d'entraînement \vec{v}_e et une accélération d'entraînement \vec{a}_e . Nous allons nous intéresser au mouvement d'un point matériel M de masse m dans ces deux référentiels. La force d'inertie d'entraînement est notée \vec{f}_e .

A. Les forces d'inerties dépendent des référentiels et ne correspondent pas à des interactions réelles, elles ne sont par conséquent pas ressenties.

B. La loi de composition des accélérations s'écrit $\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e$ avec $\vec{a}_e = \frac{d^2x(O')}{dt^2} \vec{u}_x$

C. Par application du principe de relativité galiléenne, le principe fondamental de la dynamique s'exprime de la même façon dans les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

D. La force d'inertie d'entraînement est donnée par l'expression $\vec{f}_e = m\vec{a}_e$

E. Le point M représente un objet posé dans une voiture qui décélère, nous avons $\vec{f}_e = -m\vec{a}_e$

26. Dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen), on s'intéresse au mouvement circulaire uniforme d'un satellite de masse m positionné en orbite équatoriale à l'altitude h par rapport à la surface de la Terre. Le rayon terrestre est noté R_T , la masse terrestre M_T et la constante de gravitation universelle \mathcal{G}

A. Le théorème du moment cinétique permet de montrer que la trajectoire du satellite est plane et contient le centre de la Terre.

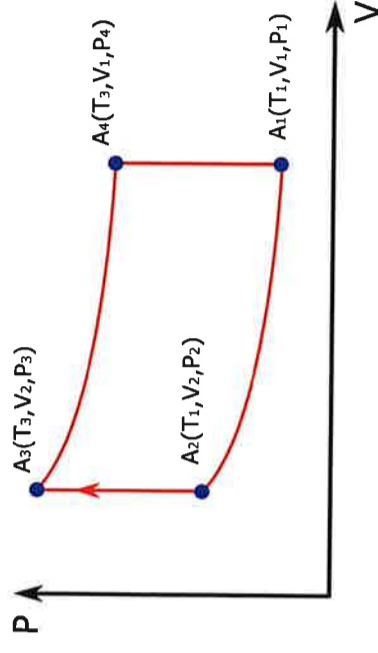
B. L'expression de la norme de la vitesse du satellite est $v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T + h}}$

C. L'énergie mécanique du satellite sur sa trajectoire est $\mathcal{E} = \frac{mM_T}{2(R_T + h)}$

D. La période de révolution du satellite est $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{M_T \mathcal{G}}}$.

E. Pour un mouvement dans une force centrale, en coordonnées polaires, le rayon de la trajectoire du satellite $r(\theta)$ est exprimé par la conique $r(\theta) = p/(1 + e \cos \theta)$ de paramètre p et d'excentricité e . Pour la trajectoire circulaire, nous avons $e = 1$.

27. On fait parcourir de façon quasi-statique et réversible le cycle A_1, A_2, A_3, A_4 décrit par le diagramme de Clapeyron ci-dessous à une quantité $n = 1/8.314$ moles de gaz parfait de coefficient adiabatique $\gamma = 1.4$.



On rappelle que la constante des gaz parfaits est $R \approx 8.314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Nous avons $T_1 = 300 \text{ K}$, $T_3 = 600 \text{ K}$ et $V_1/V_2 = 10$. A toutes fins utiles on rappelle la relation $\ln x \approx 2.3 \log x$ et que $C_v = nR/(\gamma - 1)$.

A. La variation d'énergie interne sur la phase $A_1 \rightarrow A_2$ est égale au travail W_{12} .

B. Sur la phase $A_1 \rightarrow A_2$, nous avons $W_{12} \approx 690 \text{ J}$.

C. Nous avons $W_{23} = 0 \text{ J}$ et $Q_{23} = 500 \text{ J}$

D. Sur la phase $A_3 \rightarrow A_4$, la chaleur échangée Q_{34} est négative.

E. Il s'agit du cycle de Stirling.

28. On considère un gaz parfait monoatomique (particules de masses m) à l'équilibre thermodynamique. Dans le cadre de la théorie cinétique des gaz, on rappelle que l'équation d'état de ce gaz est $PV = Nk_B T$ (N étant le nombre de particules du gaz contenues dans son volume V , $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ est la constante de Boltzmann). On rappelle la valeur du nombre d'Avogadro $N_A \approx 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

A. Pour $T = 27^\circ\text{C}$ et une pression atmosphérique standard, la distance moyenne entre deux particules est de l'ordre de grandeur de mm

B. La vitesse quadratique moyenne d'un gaz d'Hélium (masse molaire 4 g/mol) à une température de 300 K est de l'ordre de grandeur de 100 m/s .

C. La pression du gaz est une force par unité de surface due aux collisions entre particules.

D. L'énergie interne de ce gaz parfait est $U = \frac{3}{2}PV$

E. La température cinétique est une mesure de la vitesse moyenne des particules du gaz.