



ECOLE DES PONTS PARISTECH, ISAE-SUPAERO,
ENSTA PARIS, TELECOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ETIENNE, MINES NANCY, IMT ATLANTIQUE,
ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH – PSL,
ECOLE POLYTECHNIQUE, ARTS et METIERS,
ESPCI PARIS, SUPOPTIQUE, ENAC.

Admission par voie universitaire

EPREUVES de MATHÉMATIQUES et de PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures.

L'emploi de tous documents (dictionnaires, imprimés, ...) ou de tous appareils (traductrices, calculatrices électroniques, ...) est interdit dans cette épreuve.

Cette épreuve est un questionnaire à choix multiples.

Les questions sont numérotées de 1 à 20 pour l'épreuve de mathématiques et de 21 à 40 pour l'épreuve de physique.

Chaque question peut admettre, de façon variable, entre une et cinq réponses correctes.

Dans toutes les questions vous indiquerez les assertions correctes.

Exprimer les réponses exactes en noircissant la ou les cases correspondantes.

Toute réponse incorrecte sera pénalisée.

Respectez scrupuleusement les consignes de remplissage des cases du document réponse.

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

L'énoncé de cette épreuve comporte 18 pages de texte.



QCM de Mathématiques

Questions 1 à 20

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 7x + \log(2x - 5)$ pour $x \in \mathbb{I} =]\frac{5}{2}; +\infty[$.
- A. f est concave sur \mathbb{I} .
 - B. f est convexe sur \mathbb{I} .
 - C. f présente un maximum global sur \mathbb{I} en $x = 3$.
 - D. f présente un maximum global sur \mathbb{I} en $x = 4$.
 - E. L'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur \mathbb{I} .

2. Soit $f(x)$ la fonction définie par :

$$f(x) = 1 + \log(1 + 2x), \quad x \in \left] -\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \right[,$$

et $g(x)$ la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{1}{1 - 2x + x^2}, \quad x \in \left] -\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \right[.$$

- A. Les courbes représentatives de f et de g ont la même tangente au point d'abscisse $x = 0$.
- B. La courbe représentative de f est au-dessus de la courbe représentative de g au voisinage du point d'abscisse 0.
- C. La courbe représentative de f est au-dessus de la parabole d'équation $y = 1 + 2x - 3x^2$, au voisinage du point d'abscisse 0.
- D. La courbe représentative de g est au-dessus de la parabole d'équation $y = 1 + 2x + 3x^2$, au voisinage du point d'abscisse 0.
- E. Soit $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, le produit des fonctions f et g . Alors, $(h)'''(0) > 10$.

3. Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par : $f(x) = \frac{3x^3 + 5x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1}$, pour $x \neq -1, x \neq 1$, $f(-1) = 2$ et $f(1) = 0$, alors :

- A. f est continue en -1 .
- B. f est dérivable en -1 .
- C. f est continue en 1.
- D. f est dérivable en 1.
- E. f est une fonction affine sur $[1; +\infty[$.

4. Soit la fonction définie par : $f(x) = -x^2 + 7 + \frac{2}{2x-5}$, pour $x \in I = \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$.

- A. f est injective sur I .
- B. f est injective sur $[3; +\infty[$.
- C. f est surjective de I vers \mathbb{R} .
- D. f est surjective de $[3; +\infty[$ vers \mathbb{R} .
- E. f est bijective de $[3; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$.

5. Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x; y) = 4x^3 + 6xy - x^2 + 3y^2.$$

- A. f présente deux points critiques (ou stationnaires) et l'un d'entre eux est un minimum local.
- B. f présente deux points critiques (ou stationnaires) et l'un d'entre eux est un maximum local.
- C. f présente deux points critiques (ou stationnaires) et l'un d'entre eux est un point selle (ou point col).
- D. Pour tout $x > \frac{1}{3}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a $f(x; y) \leq 12$.
- E. Pour tout $x > \frac{1}{3}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a $f(x; y) \geq 0$.

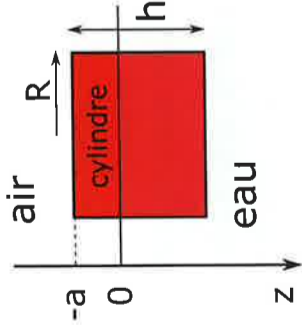
6. Soit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{3u_n + 1}$.

- A. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- B. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{5}{3}$.
- C. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2.
- D. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- E. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.

7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison $\frac{99}{100}$ telle que $u_{10} = -2$.

- A. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- B. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- E. $u_0 \geq u_{10}$.

40. On considère un corps cylindrique de hauteur h , de rayon R partiellement immergé dans de l'eau comme représenté sur la figure ci-dessous :



On note P_0 la pression atmosphérique, ρ_e la masse volumique de l'eau et ρ_c la masse volumique du cylindre.

- La résultante des forces pressantes latérales au cylindre est nulle.
- La force pressante s'exerçant sur la surface supérieure s'écrit $\vec{F}_a = \pi R^2 P_0 \vec{z}$.
- La pression de l'eau au niveau de la surface inférieure s'écrit $P(h - a) = \rho_e g (h - a)$.
- La masse d'eau déplacée par le cylindre est $m_e = \rho_e \pi R^2 (h - a)$.
- En situation d'équilibre, nous avons la relation $\frac{a}{h} = 1 - \frac{\rho_c}{\rho_e}$.



FIN de l'ÉPREUVE de PHYSIQUE

- On considère la série $\sum_{n \geq 0} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.
 - Cette série diverge vers $-\infty$.
 - Cette série diverge sans avoir de limite.
 - Cette série converge et la somme est négative.
 - Cette série converge et la somme est positive.
 - Cette série converge et la somme de cette série est $\leq \frac{3}{4}$.
- On considère la série $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n^2 + 4n + 3}\right)$.
 - Cette série diverge vers $+\infty$.
 - Cette série converge et sa somme est $\leq \frac{1}{2}$.
 - Cette série converge et sa somme est $\geq \frac{1}{4}$.
 - La série $\sum_{n \geq 0} \sqrt[n]{u_n}$ diverge.
 - La série $\sum_{n \geq 0} (u_n)^{\frac{2}{3}}$ diverge.

10. Afin de promouvoir un produit, une entreprise décide d'effectuer de la publicité via les trois médias suivants :

- presse magazine,
- Internet,
- tracts publicitaires par voie postale.

Parmi tous les utilisateurs ayant vu la publicité une fois, on considère que 20% l'ont vu dans le magazine, 50% sur Internet, et 30% par voie postale.

On sait que :

- la publicité dans le magazine mène à un achat avec une probabilité de 5%,
- la publicité sur Internet mène à un achat avec une probabilité de 12%,
- la publicité par voie postale mène à un achat avec une probabilité de 1%.

On choisit un utilisateur au hasard.

- Il y a une probabilité d'au moins 95% qu'il n'achète pas le produit.
- Il y a une probabilité d'au moins 7% qu'il achète le produit.
- S'il achète le produit, il y a une probabilité d'au moins 15% que ce soit en ayant vu la publicité dans la presse magazine.
- S'il achète le produit, il y a au moins trois fois plus de chances que ce soit en ayant vu la publicité dans la presse magazine que sur des tracts reçus par voie postale.

E. Il y a une probabilité d'au plus 30% qu'il ait vu la publicité sur un tract reçu par voie postale tout en n'ayant pas acheté le produit.

11. Soit $p \in]0; 1[$. Soit $(X; Y)$ un couple de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé Ω muni de la probabilité P , tel que :

$$X(\Omega) = \{-1; 0\}; Y(\Omega) = \{0; 2\};$$

$$P(X = 0; Y = 0) = P(X = -1; Y = 2) = p,$$

et

$$P(X = 0; Y = 2) = 2p.$$

- A. Il existe une valeur de p pour laquelle X et Y sont indépendantes.
- B. Tout réel $p \in]0; \frac{1}{2}[$ convient.
- C. Tout réel $p \in]0; \frac{1}{3}[$ convient.
- D. Il existe une valeur de p pour laquelle $E(X) = E(Y)$.
- E. Il existe une valeur de p pour laquelle $E(X + Y) = 0$.

12. Soit $p \in]0; 1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi binomiale de paramètres $(5; p)$ et Y suit une loi binomiale de paramètres $(4; 1-p)$.

- A. Il existe une valeur de p telle que : $E(4X) = E(5Y)$.
- B. Il existe une valeur de p telle que : $\text{Variance}(4X) = \text{Variance}(5Y)$.
- C. Pour tout $p \in]0; 1[$: $P(X + Y = 0) = P(X + Y = 9)$.
- D. Pour toute valeur de p on a : $E(X + Y) \geq 2$.
- E. Pour toute valeur de p on a : $\text{Variance}(X + Y) \geq 2$.

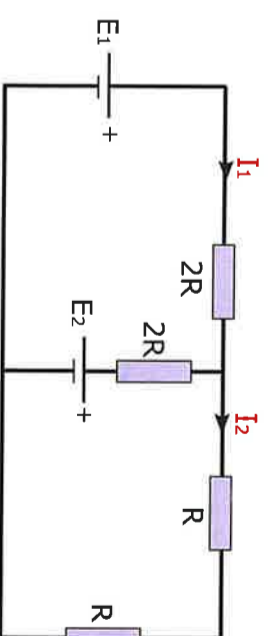
13. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(x) = \frac{3}{x^4}$, si $x \geq 1$. On admet que f peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire X continue sur \mathbb{R} . $E(X)$ désigne l'espérance de X et $\text{Var}(X)$ sa variance.

- A. $E(X) \geq 2$.
- B. $\text{Var}(X) = \frac{1}{2}E(X)$.
- C. $\text{Var}(X) = \frac{3}{4}$.
- D. La probabilité de l'événement $X < 2$ est supérieure à 0.75.
- E. La probabilité de l'événement $X \leq \frac{4}{3}$, sachant que l'événement $X < 2$ est réalisé, est supérieure à 0.75.

38. On considère une distribution de charges sphérique de rayon a de centre O . La charge totale de cette sphère est notée Q . On note r la distance mesurée par rapport au centre de la sphère.

- A. Pour $r \geq a$ et une répartition volumique de charges, le champ électrique créée par la sphère est $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.
- B. Pour $r < a$ et une répartition volumique de charges de densité uniforme, le champ électrique créée par la sphère est $E(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}$.
- C. Pour $r < a$ et une répartition volumique de charges de densité $\rho(r)$, le champ électrique créée par la sphère est $E(r) = \frac{\rho(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$.
- D. Pour $r \geq a$ et une densité surfacique uniforme de charges σ , le champ électrique créée par la sphère est $E(r) = \frac{a^2\sigma}{\epsilon_0 r^2}$.
- E. Pour $r < a$ et une densité surfacique uniforme de charges σ , le champ électrique créée par la sphère est $E(r) = \frac{4\pi r^2\sigma}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

39. On s'intéresse au circuit électrique ci-dessous :



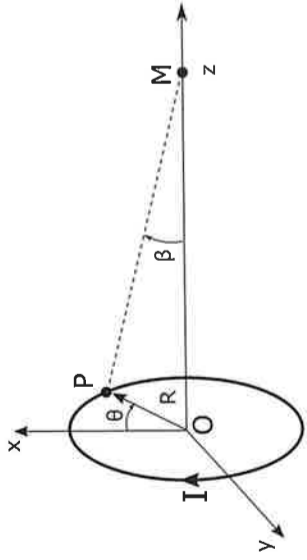
- A. Nous avons $I_1 = \frac{2E_1 - E_2}{6R}$ et $I_2 = \frac{E_1 - E_2}{6R}$.
- B. Nous avons $I_1 = \frac{2E_2 - E_1}{6R}$ et $I_2 = \frac{E_2 - E_1}{6R}$.
- C. Nous avons $I_1 = \frac{2E_2 - E_1}{6R}$ et $I_2 = \frac{E_1 + E_2}{6R}$.
- D. Nous avons $I_1 = \frac{2E_1 - E_2}{6R}$ et $I_2 = \frac{E_1 + E_2}{6R}$.
- E. Nous avons $I_1 = \frac{2E_2 - E_1}{6R}$ et $I_2 = \frac{E_1 - E_2}{6R}$.

36. On considère une onde électromagnétique dont le champ électrique est donné par

$$l'expression : \vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_1 \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) \vec{u}_y.$$

- A. Avec deux composantes de champ déphasées, ce champ ne correspond pas à celui d'une onde plane.
 B. Cette onde est polarisée circulairement.
 C. Les coordonnées cartésiennes du vecteur d'ondes \vec{k} sont $(\frac{\omega}{c} \cos \frac{\pi}{4}, \frac{\omega}{c} \sin \frac{\pi}{4}, 0)$.
 D. Cette onde se propage dans la direction des z négatifs.
 E. Le champ $\vec{B}(\vec{r}, t)$ associé à cette onde peut s'obtenir avec la relation $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t)}{\omega}$.

37. La figure ci-dessous représente une spire de rayon R , parcourue par un courant continu I .



On s'intéresse au champ magnétique généré au point M positionné sur l'axe z de la spire. Le champ infinitésimal $d\vec{B}(M)$ généré par un élément de longueur $d\vec{l} = R d\theta \vec{e}_\theta$ de la spire au point P (la symétrie du problème est cylindrique) est donné par la formule de Biot et Savart issue des lois de la magnétostatique :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{|\vec{PM}|^3}.$$

- A. Le champ magnétique au point M ne dépend pas de l'angle θ .
 B. La composante $dB_z(M)$ est égale à $dB_z(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\theta}{|\vec{PM}|^2} \sin \beta$.
 C. La composante $dB_z(M)$ est égale à $dB_z(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \beta d\theta$.
 D. Au point O , la composante selon z du champ magnétique est $B(O) = \frac{\mu_0 I}{R}$.
 E. La formule de Biot et Savart est toujours applicable si le courant est variable à une fréquence de quelques GHz, il suffit simplement de remplacer I par $I(t)$ dans l'expression ci-dessus.

14. On considère les séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2^n}{n^2} \right) x^n, \quad (1)$$

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n^2}{n! + 2^n} \right) x^n, \quad (2)$$

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^2 2^n} \right) x^n. \quad (3)$$

- A. Le plus petit des trois rayons de convergence est 2.
 B. Le plus grand des trois rayons de convergence est 2.
 C. La somme des ces trois séries entières est une série entière convergente pour tout $x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$.
 D. La somme des ces trois séries entières est une série entière convergente pour tout $x \in]0; \frac{1}{2}[$.
 E. La somme des ces trois séries entières est une série entière convergente pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}]$.
 15. Soit n un entier naturel. Soit l'intégrale $I_n = \int_1^e t(\ln t)^n dt$.
 A. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 B. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 C. Pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.
 D. Pour tout $n \in \mathbb{N} : I_n \geq \frac{e^2}{n+3}$.
 E. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = 0$.

16. Soit $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2; y \geq 0, \text{ et } xy \leq 1\}$. Soit $I = \iint_D y^2 x \, dx dy$.

- A. $I \leq \frac{1}{2}$.
 B. $I \geq \frac{1}{3}$.
 C. $I = \int_1^2 \frac{1}{3t^2} dt$.
 D. $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} (1 - t^2) dt$.
 E. $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} (\frac{5}{4} - t^2) dt$.

17. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 4 \\ -3 & 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire dont M est la matrice représentative dans les bases canoniques respectives de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^2 .

- A. $\dim(\ker(f)) = 4$.
- B. $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.
- C. f est injective.
- D. f est surjective.
- E. f est bijective.

18. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 6 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire dont M est la matrice représentative dans la base canonique de \mathbb{R}^3

- A. -2 est valeur propre de M .
- B. Le vecteur $\vec{u} = (1; -1; 2)$ est un vecteur propre de f .
- C. Le vecteur $\vec{u} = (1; -1; 1)$ est un vecteur propre de f .
- D. Deux des valeurs propres de M sont opposées.
- E. La somme des valeurs propres de M est positive.

19. On se place dans l'espace affine de dimension 3 muni du produit scalaire usuel et d'un repère orthonormé. Soient \mathcal{D} la droite de vecteur directeur $\vec{u} = (1; -1; 2)$ passant par le point $M \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, \mathcal{D} le plan affine d'équation $3x + 2y - z + 1 = 0$ et le point

$$N \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ appartenant à } \mathcal{D}.$$

- A. La droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{D} .
- B. La droite \mathcal{D} est orthogonale au plan \mathcal{D} .
- C. La distance du point M au plan \mathcal{D} est supérieure ou égale à $\sqrt{2}$.
- D. La distance du point M au plan \mathcal{D} est égale à MN .
- E. La distance du point N à la droite \mathcal{D} est supérieure à la distance du point M au plan \mathcal{D} .

34. On s'intéresse à la diffraction d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ par un réseau de diffraction en transmission de période a . On rappelle que la direction θ_k des ordres diffractés est donnée par la relation fondamentale des réseaux :

$$\sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda}{a},$$

où k est un entier relatif caractérisant l'ordre diffracté, θ_0 est l'angle d'incidence et on considère que le milieu de propagation de part et d'autre du réseau est l'air.

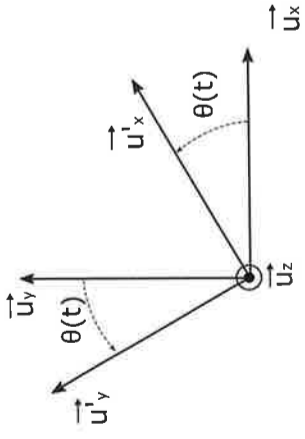
- A. L'étude de la diffraction dans l'ordre zéro permet d'analyser une lumière polychromatique.
- B. En incidence normale, pour $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ et $a = 1 \mu\text{m}$, l'angle diffracté pour l'ordre $k = +3$ est égal à 90° .
- C. En incidence normale, 7 ordres diffractés peuvent être observés pour $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ et $a = 1.5 \mu\text{m}$.
- D. Si le réseau est éclairé en lumière blanche, il est possible que des ordres diffractés se recouvrent spatialement si la période a du réseau est trop faible.
- E. Un réseau étant une structure périodique, sa fréquence spatiale fondamentale est égale à $\frac{1}{a}$.

35. Dans le vide et loin de toute source de charge ou de courant, les équations de Maxwell pour les champs électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0, & \text{div} \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \text{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, & \text{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

On considère qu'au point quelconque \vec{r} de l'espace, le champ électromagnétique est de la forme : $\vec{E}(\vec{r}, t) = f(z)e^{-\alpha t} \vec{u}_x$ et $\vec{B}(\vec{r}, t) = g(z)e^{-\alpha t} \vec{u}_y$, avec α un coefficient réel.

- A. Les champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ correspondent à ceux d'une onde progressive.
- B. Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ vérifie bien l'équation de Maxwell Gauss.
- C. Nous avons la relation $f(z) = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 \alpha} \frac{dg(z)}{dz}$.
- D. Nous avons la relation $g(z) = \frac{1}{\alpha} \frac{df(z)}{dz}$.
- E. Dans le cas le plus général possible, nous avons $f(z) = A \cos(\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \alpha z) + B \sin(\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \alpha z)$, où A et B sont des constantes d'intégrations dépendant des conditions aux limites appliquées sur les champs.



32. On considère deux référentiels $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $\mathcal{R}'(O', \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$. \mathcal{R} est un référentiel Galiléen et \mathcal{R}' est en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe \vec{u}_z de \mathcal{R} tel que : O' est confondu avec O , $\vec{u}'_z = \vec{u}_z$ et $\vec{\Omega} = \frac{d\theta(t)}{dt} \vec{u}_z = \Omega \vec{u}_z$.

Les deux référentiels sont représentés sur la figure ci-dessus et nous allons nous intéresser à décrire le mouvement d'un point matériel M de masse m dans ces deux référentiels. On rappelle les lois de composition des vitesses et des accélérations dans ce cas :

- $\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}_e$ (\vec{v}_e vitesse d'entraînement),
- $\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e + \vec{a}_C$ (\vec{a}_e accélération d'entraînement et \vec{a}_C accélération de Coriolis).

- A. Nous avons $\vec{u}'_x = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$ et $\vec{u}'_y = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$.
- B. La vitesse d'entraînement \vec{v}_e est égale à $\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$.
- C. Les quantités $m\vec{a}_e$ et $m\vec{a}_C$ sont appelées forces d'inertie.
- D. L'accélération de Coriolis $\vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ est un terme trop faible pour pouvoir être observé expérimentalement.
- E. Si la seule force appliquée sur le point matériel M est son poids \vec{P} , dans le référentiel \mathcal{R}' la seconde loi de Newton s'écrit $m\vec{a}'(M) = \vec{P}$.

33. On considère une lunette de Galilée constituée d'une lentille mince convergente de distance focale image $f'_1 = 60 \text{ cm}$ comme objectif et une lentille mince divergente de distance focale image $f'_2 = -6 \text{ cm}$ comme oculaire.

- A. Pour obtenir un dispositif afocal, le foyer image de l'objectif doit être confondu avec le foyer objet de l'oculaire.
- B. Les centres optiques des lentilles sont espacés de la distance $d = 66 \text{ cm}$.
- C. Le grossissement angulaire est égal à $\frac{f'_1}{f'_2}$.
- D. L'avantage de cette lunette est qu'elle permet d'observer un grand champ (objet avec un très grand diamètre apparent).
- E. L'image obtenue avec ce type de lunette est droite par rapport à l'objet.

20. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2xy = x$ pour tout x réel.

- A. Pour toute fonction f solution de (E) , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- B. Pour toute fonction f solution de (E) , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- C. Pour toute fonction f solution de (E) , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- D. Pour toute fonction f solution de (E) , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$.
- E. Toute fonction f solution de (E) , admet un maximum global sur \mathbb{R} .

FIN de l'ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES



QCM de Physique

Questions 21 à 40

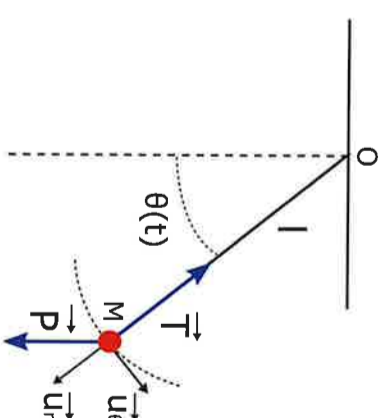
21. Quelques questions sur des constantes et ordres de grandeur utilisés couramment en Physique :
- A. La pression standard est égale à $1013.25 \times 10^2 \text{ N/m}^2$.
 - B. Le nombre d'Avogadro est $N_A \approx 6.02 \times 10^{-23} \text{ mol}^{-1}$.
 - C. Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de grandeur de 1 Tesla.
 - D. La charge de l'électron est égale à $e \approx 1.602 \times 10^{19} \text{ C}$.
 - E. La fréquence d'une onde optique visible est de l'ordre de grandeur du pétahertz.

22. La loi de Fourier est une loi phénoménologique donnant le flux de chaleur surfacique transféré par conduction dans un matériau, son expression est $\vec{j}_Q = -\kappa \text{grad}T$, où κ est la conductivité thermique caractéristique du matériau. Cette loi permet d'établir l'équation de la chaleur donnant l'évolution temporelle de la distribution de température dans un système : $\frac{\partial T(t, \vec{r})}{\partial t} = \alpha \Delta T(t, \vec{r})$, où α est appelé le coefficient de diffusivité thermique.

- A. L'unité de la conductivité thermique κ est le $\text{J.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.
- B. Le coefficient de conductivité thermique κ peut être positif ou négatif.
- C. L'unité du coefficient de diffusivité thermique α est le m^2/s .
- D. La loi de Fourier permet de décrire les transferts thermiques dans le vide, il suffit de connaître la valeur de sa conductivité thermique.
- E. En régime stationnaire, la distribution de température dans une barre unidimensionnelle, calorifugée, de longueur e , dont les températures aux extrémités sont fixées à $T(t, 0) = T_1$ et $T(t, e) = T_2$ est donnée par :

$$T(t, x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e}x.$$

31. On considère le pendule simple représenté sur la figure ci-dessous. Nous nous intéressons au mouvement du point matériel M de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé Galiléen.



La longueur du fil du pendule est notée l . Le point matériel M est soumis à deux forces, le poids \vec{P} et la tension du fil \vec{T} et son mouvement sera décrit en coordonnées polaires (r, θ) dans la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

La longueur du fil étant fixe, le mouvement du point M sera uniquement caractérisé par la connaissance de $\theta(t)$ dont l'évolution est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2\theta(t) = 0.$$

On notera g l'accélération de la pesanteur et T la norme de la force de tension du fil.

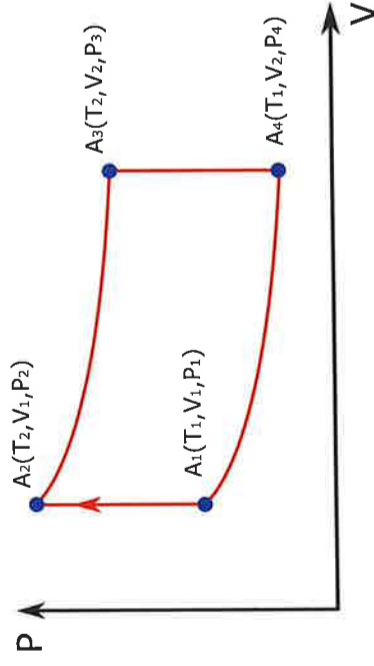
- A. Dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$a_r = -\frac{T}{m} + g \cos \theta,$$

$$a_\theta = -g \sin \theta.$$

- B. La pulsation propre ω_0 des oscillations est égale à $\frac{g}{l}$.
- C. A l'instant $t = 0$, le pendule est lâché avec la condition initiale $\theta(0) = -\theta_0$, la solution de l'équation différentielle est alors harmonique avec $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t)$.
- D. Le référentiel étant Galiléen, l'équation différentielle pour $\theta(t)$ est valide en toutes conditions.
- E. En coordonnées polaires, nous avons $\vec{OM} = l\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = l\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta$.

29. On fait parcourir de façon quasi-statique et réversible le cycle A_1, A_2, A_3, A_4 décrit par le diagramme de Clapeyron ci-dessous à une mole de gaz parfait de capacité calorifique à volume constant C_v .



On rappelle que la constante des gaz parfaits est notée R .

- La transformation $A_1 \rightarrow A_2$ est isochore et la transformation $A_2 \rightarrow A_3$ isotherme.
- Ce cycle est un cycle résistant.
- Les expressions des travaux pour chaque étape du cycle sont $W_{12} = W_{34} = 0$, $W_{23} = -RT_2(V_2 - V_1)$ et $W_{41} = -RT_1(V_1 - V_2)$.
- Les chaleurs reçues par le gaz sont $Q_{12} = -Q_{34} = C_v(T_2 - T_1)$, $Q_{23} = -W_{23}$ et $Q_{41} = -W_{41}$.
- Ce cycle est le cycle idéal de Carnot.

30. Quelques questions de thermodynamique sur les machines dithermes fonctionnant avec une source chaude à la température T_c et une source froide à la température T_f :

- Un climatiseur échange une quantité de chaleur $Q_c > 0$ avec la source chaude, une quantité de chaleur $Q_f < 0$ avec la source froide et un travail $W > 0$.
- Un moteur ditherme échange une quantité de chaleur $Q_c > 0$ avec la source chaude, une quantité de chaleur $Q_f < 0$ avec la source froide et son travail $W < 0$.
- Une pompe à chaleur échange une quantité de chaleur $Q_c < 0$ avec la source chaude, une quantité de chaleur $Q_f > 0$ avec la source froide et son travail $W > 0$.
- Pour une machine thermique ditherme, le rendement idéal de Carnot est

$$\eta = 1 - \frac{T_c}{T_f}.$$

- Pourquoi utiliser des machines dithermes puisqu'il serait plus simple d'utiliser des machines monothermes avec une seule source de température.

23. On donne ci-dessous les quatre premières lignes de la classification périodique de Mendeleïev :

1	2											18	18	18	18		
H	He											Ne	Ar	Kr	Xe		
Li	Be	B	C	N	O	F	Ne										
Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar										
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr

- L'oxygène possède deux électrons de coeur et 6 électrons de valence.
 - La configuration électronique du Scandium est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^3$.
 - La configuration électronique du Fer est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$.
 - Le remplissage des couches électroniques suit la règle de Klechkowski.
 - Il est possible d'obtenir à partir de la classification périodique la configuration électronique des atomes neutres électriquement ainsi que leurs ions en retirant et/ou ajoutant un ou plusieurs électrons.
24. La loi de Planck caractérisant le rayonnement thermique donne la densité spectrale d'énergie électromagnétique d'un corps noir $\rho(\nu, T)$ pour une fréquence ν et à la température T . Son expression est donnée par la relation suivante :

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{k_B T} - 1}$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide, h la constante de Planck et k_B la constante de Boltzmann. Une conséquence de cette loi est la loi de Wien donnant la longueur d'onde maximale d'un corps noir pour une température donnée : $\lambda_{max} = \frac{A}{T}$ avec $A = 2.898 \mu\text{m.K}$.

- L'unité de $\rho(\nu, T)$ est le $J.m^{-3}.Hz^{-1}$.
- La valeur de la constante de Boltzmann est $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23} J.K$.
- Si $T = 300K$, un corps noir émet majoritairement dans le spectre infrarouge.
- La densité d'énergie électromagnétique $\rho(\nu, T)$ est une fonction continue ayant pour origine la quantification de l'énergie d'un rayonnement électromagnétique.
- La température de surface du Soleil, siège de fortes réactions nucléaires, est d'environ seulement 6000K.

25. La relation d'indétermination d'Heisenberg spatiale mettant en jeu la mesure de la position x d'une particule ainsi que celle de sa quantité de mouvement p_x s'écrit :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

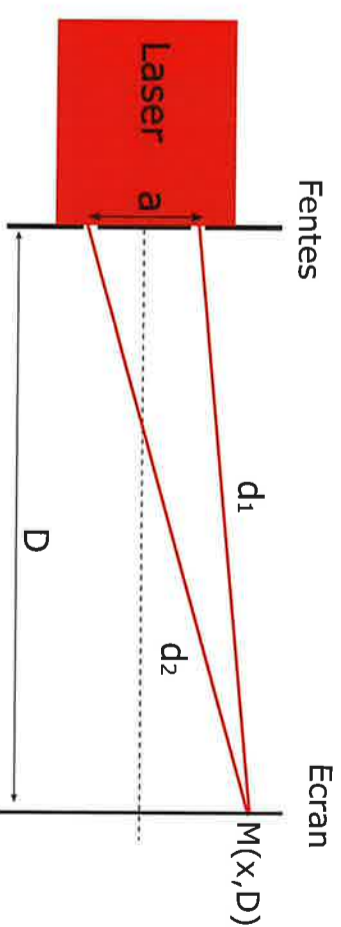
- A. L'indétermination liée aux mesures de position et de quantité de mouvement est due à une imprécision des instruments de mesure.
 B. Connaissant exactement la position x d'une particule, il est impossible de mesurer simultanément sa quantité de mouvement p_y avec une précision infinie.
 C. Une conséquence de cette relation est qu'une particule confinée dans un puits de potentiel possède une énergie minimale non-nulle.
 D. Connaissant la constante de Planck $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ et la masse de l'électron $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$. L'indétermination sur la vitesse d'un électron confiné dans un atome ($\Delta x = 1 \text{ \AA}$) est $\Delta v_x \geq 5.8 \times 10^5 \text{ m/s}$.
 E. Les grandeurs Δx et Δp_x sont des dispersions statistiques dues à la nature même de la fonction d'onde.

26. Dans sa forme la plus générale, l'équation de Schrödinger unidimensionnelle régissant le comportement de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ associée à une particule de masse m s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t).$$

- A. Pour un état stationnaire, la fonction d'onde est indépendante du temps et peut s'écrire $\Psi(x, t) = \varphi(x)$.
 B. La probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$ est donnée par $|\Psi(x, t)|^2 dx$.
 C. Connaissant $\Psi(x, 0)$, il est possible de déterminer $\Psi(x, t)$ à tout instant $t \geq 0$.
 D. $V(x) \Psi(x, t)$ est le terme d'énergie cinétique.
 E. La signification physique de $\Psi(x, t)$ est celle d'une amplitude de probabilité.

27. Le dispositif interférométrique des fentes d'Young est représenté sur la figure ci-dessous.



Un laser de longueur d'onde λ éclaire deux fentes séparées d'une distance a et la figure d'interférences est observée sur un écran placé à une distance D des fentes.

- A. La différence de marche δ entre les deux trajets au point $M(x, D)$ sur l'écran est égale à $\delta = d_2 - d_1 = D \left[\sqrt{1 + \frac{(x+a/2)^2}{D^2}} - \sqrt{1 + \frac{(x-a/2)^2}{D^2}} \right]$.
 B. Au niveau de l'écran, l'interfrange i est donné par $i = \frac{aD}{\lambda}$.
 C. Si le champ électrique au point M s'écrit $E(M) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, l'intensité mesurée sur l'écran sera $I(M) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$.
 D. Les franges d'interférences seront plus espacées pour un laser bleu que pour un laser rouge.
 E. Un laser étant une source cohérente, il est évidemment possible de réaliser cette expérience avec deux lasers différents mais de même longueur d'onde.

28. Toutes les propositions ci-dessous sont liées au second principe de la thermodynamique, lesquelles sont vraies ?

- A. Au cours d'une transformation, l'entropie échangée avec l'extérieur peut être négative.
 B. L'unité de l'entropie est le J/K .
 C. L'entropie est une grandeur intensive.
 D. Au cours d'une transformation irréversible, l'entropie de création d'un système est positive.
 E. L'entropie d'un système isolé est nulle puis qu'il n'échange pas d'énergie avec l'extérieur.