QCM - Mathématiques

Questions 1 à 20

1. On donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par,

$$f(x) = x.\log(1+x^2).$$

La dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ vaut,

A. $\frac{1}{1+x^2}$?
B. $\frac{2x}{1+x^2}$?
C. $\log(1+x^2)+1$?
D. $\log(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}$?
E. $\log(1+x^2)+\frac{x}{1+x^2}$?

2. Soit la matrice 4×4,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour cette matrice A nous avons,

A. $\mathrm{Rang}(A) = 1$ et $\dim(\ker(A)) = 1$?
B. $\mathrm{Rang}(A) = 1$ et $\dim(\ker(A)) = 3$?
C. $\mathrm{Rang}(A) = 2$ et $\dim(\ker(A)) = 2$?
D. $\mathrm{Rang}(A) = 2$ et $\dim(\ker(A)) = 3$?
E. $\mathrm{Rang}(A) = 3$ et $\dim(\ker(A)) = 1$?

3. Dans une assemblée de 10 personnes, on doit choisir 2 délégués. On note A le nombre de choix possibles.
Dans une autre assemblée de 10 personnes, on doit choisir 1 président et 1 vice-président. On note B le nombre de choix possibles.
Alors,

A. $A = 45$,
B. $A = 90$,
C. $A = 10!$,
D. $B = 45$,
E. $B = 90$.

4. Soit X une variable aléatoire distribuée selon la loi uniforme sur $[0, 1]$.
La variance de X vaut,

   A. 0 ?
   B. $\frac{1}{12}$?
   C. $\frac{1}{4}$?
   D. $\frac{1}{3}$?
   E. $\frac{1}{2}$?

5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant D vaut,

   A. $D = -8$?
   B. $D = -1$?
   C. $D = 0$?
   D. $D = 1$?
   E. $D = 8$?

6. Le développement limité à l'ordre 3 en $x = 0$, de

$$\frac{1}{1 - x - x^2}$$

est :

   A. $1 + x + 2x^2 + x^3 + o(x^3)$?
   B. $1 + x + 2x^2 + o(x^3)$?
   C. $1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$?
   D. $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)$?
   E. $1 + o(x^3)$?

7. On note R le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n,$$

et R' celui de

$$\sum_{n \geq 0} e^n z^n.$$

Alors,

A. $R = 1$ et $R' = \frac{1}{e}$?

B. $R = 1$ et $R' = 1$?

C. $R = +\infty$ et $R' = \frac{1}{e}$?

D. $R = +\infty$ et $R' = 1$?

E. $R = +\infty$ et $R' = +\infty$?

8. On considère $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Alors,

A. φ est paire,

B. φ est continue sur $\mathbb{R}$,

C. φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,

D. $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$,

E. $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$.

9. Soit $X = \{a; b; c\}$ et $Y = \{0; 1\}$. On donne l'application $f : X \to Y$, définie par :

$$f : \begin{cases} a & \mapsto 0 \\ b & \mapsto 1 \\ c & \mapsto 0 \end{cases}$$

Alors,

A. f est injective ?

B. f n'est pas injective ?

C. f est surjective ?

D. f n'est pas surjective ?

E. f est bijective ?

10. Comment choisir la constante réelle C pour que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{C}{1+x^2},$$

soit une densité de probabilité ?

   A. C'est impossible ?
   B. $C = \pi$?
   C. $C = -\pi$?
   D. $C = \frac{1}{\pi}$?
   E. $C = 1$?

11. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{L}(E)$ étant l'ensemble des applications linéaires de $E \to E$.
Alors on a toujours,

   A. $\ker(f) \subset \ker(f^2)$,
   B. $\ker(f^2) \subset \ker(f)$,
   C. $\ker(f) = \ker(f^2)$?
   D. $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(f^2)$?
   E. $\mathrm{im}(f^2) \subset \mathrm{im}(f)$?

12. On considère l'équation différentielle,

$$x' = tx + 1 - t^2$$

où $t \in \mathbb{R}$ est la variable et $x(t)$ la fonction inconnue. Les solutions de cette équation sont de la forme :

   A. $t \mapsto Ce^{t^2} + 1$?
   B. $t \mapsto Ce^{t^2} + t$?
   C. $t \mapsto Ce^{\frac{t^2}{2}} + 1$?
   D. $t \mapsto Ce^{\frac{t^2}{2}} + t$?
   E. aucune des réponses précédentes.

13. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels, on définit la norme $\|.\|_\infty$ par :

$$\|P\|_\infty = \sup_{0 \leq i \leq n} |a_i|,$$

lorsque,

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

et la norme $\|.\|_1$ par :

$$\|P\|_1 = \sum_{0 \leq i \leq n}^{n} |a_i|,$$

lorsque,

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Pour $q \in \mathbb{N}$, on considère :

$$P_q = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^q$$

Parmi les réponses suivantes, indiquez les correctes :

A. $\|P_q\|_\infty = 1$,
B. $\|P_q\|_\infty = q + 1$,
C. $\|P_q\|_1 = 1$,
D. $\|P_q\|_1 = q + 1$,
E. les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$, sont équivalentes.

14. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes ayant la même densité de probabilité, donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

On note g la densité de probabilité de la variable $Z = X + Y$. Alors,

A. $g = f$?
B. g est nulle en dehors de $[0, 1]$?
C. g est nulle en dehors de $[0, 2]$?
D. si $x \in [0, 1]$, $g(x) = x$?
E. si $x \in [0, 1]$, $g(x) = x^2$.

15. On donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Que vaut,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx \;?$$

A. π,
B. $\frac{\pi}{2}$,
C. $\sqrt{\pi}$,
D. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,
E. aucune des réponses précédentes.

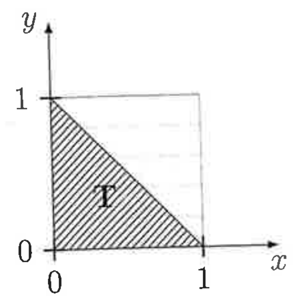
16. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \sin(\frac{t}{n})}{t(1+t^2)}\, dt.$$

Alors,

A. $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$,
B. $\lim_{n\to+\infty} I_n = 1$,
C. $\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$,
D. $\lim_{n\to+\infty} I_n = \pi$,
E. $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

17. On note $\mathbf{T}$ la partie du plan $\mathbb{R}^2$ hachurée dans la figure suivante :



Que vaut

$$\int_{\mathbf{T}} x\, dx\, dy \;?$$

A. 0,
B. $\frac{1}{6}$,
C. $\frac{1}{3}$,
D. $\frac{1}{2}$,
E. 1.

18. On définit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, par

$$x \mapsto \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-t^2} \, dt.$$

Alors,

A. $\varphi'(x) = \varphi(x)$,
B. $\varphi'(x) = x\varphi(x)$,
C. $\varphi'(x) = \frac{x}{2}\varphi(x)$,
D. $\varphi'(x) = x^2\varphi(x)$,
E. $\varphi'(x) = \frac{x^2}{2}\varphi(x)$.

19. Soit $(x(t), y(t))$ une solution du système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}$$

On note,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Alors,

A. les valeurs propres de A sont -1 et 2 ?
B. $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$?
C. $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$?
D. $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} y(t) = 1$?
E. $\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$, $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$?

20. On s'intéresse aux extremas de :

$$\begin{aligned} f \ : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1. \end{aligned}$$

Alors,

A. Il n'y a pas de point critique,

B. $(0,0)$ est un point critique,

C. f a un minimum local en $(0,0)$,

D. f a un maximum local en $(0,0)$,

E. f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$

FIN de l'EPREUVE de MATHEMATIQUES