Nom :
Prénom :
N° Dossier :
Centre d'écrit :

# TEST SCIENTIFIQUE : 1ère partie

## NE PAS OUVRIR LE FASCICULE AVANT D'Y ÊTRE INVITÉ

### INSTRUCTIONS

- La durée de cette première partie est de 2h.

- Chaque question ou affirmation de ce test est suivie de cinq réponses ou compléments possibles. Sélectionnez celle qui vous semble la plus appropriée dans chacun des cas et marquez la case correspondante dans la fiche de réponse jointe. Les réponses multiples seront considérées comme fausses.

- Vous commencerez par traiter la partie
  Mathématiques IA      Questions 01 à 20.
  Puis, en fonction de votre formation d'origine, vous choisirez entre :
  [_] Mathématiques IB      Questions 21 à 35
  *ou*
  [_] Chimie I      Questions 36 à 50
  Vous indiquerez ce choix par une croix dans une des cases ci-dessus prévues à cet effet. Notez que la partie Chimie I est obligatoire pour les candidats à Chimie ParisTech.

- **Le fascicule complet doit être rendu à la fin du test.**

- Il n'est pas permis d'utiliser du brouillon séparé ; veuillez utiliser le verso des pages du fascicule.

- Ne pas dégrafer le fascicule.

- Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

- Calculatrices et dictionnaires électroniques ne sont pas autorisés.

- +1 point pour une réponse juste, –1/4 point pour une réponse fausse, 0 pour une absence de réponse.

- Inscrivez vos nom, prénom, département et université sur la première page de ce fascicule.

## MATHÉMATIQUES IA

1. Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. La négation de la proposition :

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ pair tel que } \forall x \in A,\ |x-n| < 3$$

est :

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ pair, $\exists x \in A$ tel que $|x-n| \geq 3$
   (b) $\exists n \in \mathbb{N}$ impair tel que $\forall x \in A$, $|x-n| < 3$
   (c) $\exists n \in \mathbb{N}$ pair tel que $\forall x \in A$, $|x-n| \geq 3$
   (d) $\forall x \in A$, $\exists n \in \mathbb{N}$ impair tel que $|x-n| < 3$
   (e) $\exists n \in \mathbb{N}$ pair et $\exists x \in A$ tels que $|x-n| \geq 3$

2. L'ensemble des nombres réels $x$ tels que $|x-1| \geq \sqrt{3-x}$ est égal à

   (a) $(-\infty, 3]$
   (b) $[2,3]$
   (c) $]-\infty,-1] \cup [2,+\infty)$
   (d) $]-\infty,-1] \cup [2,3]$
   (e) l'ensemble vide $\emptyset$

3. Le module et un argument du nombre complexe

$$(1-2i)^2(1+7i)\exp(-2\ln 5 + i\pi/3)$$

sont donnés par

   (a) $5\ ,\ 7\pi/12$
   (b) $5\sqrt{2}\ ,\ 0$
   (c) $\sqrt{2}\ ,\ 7\pi/12$
   (d) $5\ ,\ -\pi/12$
   (e) $\sqrt{2}\ ,\ \pi/12$

4. Lequel parmi ces polynômes a (au moins) une racine double réelle ?

   (a) $X^4 + X$
   (b) $16\,X^4 - 1$
   (c) $16\,X^4 - 32\,X^3 + 16\,X^2 - 1$
   (d) $X^4 - 3\,X^3 + 3\,X^2 + X$
   (e) $X^4 + 2\,X^2 + 1$

5. Soient $x$, $y$ et $z$ trois nombres réels avec $y \neq 1$ ou $z \neq 1$. Le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$

   (a) pour $y = z = 0$
   (b) pour $x + y + z = 0$
   (c) pour $x + y + z = 3\,x\,y\,z$
   (d) pour $x + y + z = x\,y\,z + 2$
   (e) pour $x + y + z = 1 - x\,y\,z$

6. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs $\mathbf{x} = (1,0,0,4), \mathbf{y} = (1,1,1,3), \mathbf{z} = (2,1,1,1), \mathbf{t} = (-1,0,-1,2)$ and $\mathbf{u} = (0,0,0,3)$. On note $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$, et par $G$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $\mathbf{t}$ et $\mathbf{u}$. Les dimensions des quatre sous-espaces vectoriels $F, G, F \cap G$ et $F + G$ sont données, dans cet ordre, par les quatre nombres

   (a) $2, 2, 0, 4$
   (b) $2, 2, 1, 3$
   (c) $3, 2, 2, 4$
   (d) $3, 2, 2, 3$
   (e) $3, 2, 1, 4$

7. Soit $M$ une matrice carrée et soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur propre de $M$ associé à la valeur propre 2.
On considère les 3 propositions :

   (I) $2\,\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de $M$ associé à la valeur propre 4
   (II) $\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de $2\,M$ associé à la valeur propre 4
   (III) $-\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de $-M$ associé à la valeur propre 2

   Quelles sont parmi ces propositions celles qui sont exactes ?

   (a) (I) seulement
   (b) (II) seulement
   (c) (I) et (III) seulement
   (d) (II) et (III) seulement
   (e) (I), (II) et (III)

8. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & b \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ admet le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre

   (a) pour une infinité de paires $(a,b)$
   (b) pour aucune paire $(a,b)$
   (c) exactement quand $a^2 = 1$ et $b^2 = 25$
   (d) exactement quand $(a,b) = (1,7)$
   (e) exactement quand $(a,b) = (1,5)$

9. Soit $f : [1,+\infty[ \to \mathbb{R}$ une application dérivable et soit $n$ un entier strictement positif.
On pose $g(x) = \left(f(x^{1/n})\right)^n$. Alors $g'(1) =$

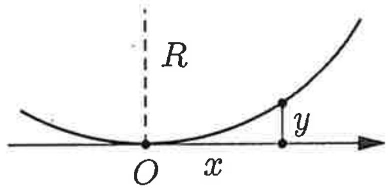
   (a) $f'(1)$
   (b) $n\,f'(1)$
   (c) $n\,f(1)^{n-1}\,f'(1)^n$

(d) $f(1)^{n-1}\, f'(1)$
(e) $f(1)^{1-1/n}\, f'(1)^{1/n}$

10. Le développement limité à l'ordre 5 en 0 de
$$\frac{1}{x^2}\ \ln\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big).$$
est

(a) $x^4$
(b) $1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}$
(c) $1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{3}$
(d) $x+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{3}$
(e) $\dfrac{1}{x^2}+1+x^2+x^4$

11. On considère la figure ci-dessous, où la courbe est un cercle de rayon $R > 0$ tangent au point $O$ à l'axe.




Quand $x$ tend vers 0, $y$ est équivalent à

(a) $x$
(b) $\dfrac{x}{R}$
(c) $\dfrac{x^2}{2\,R}$
(d) $\sin\dfrac{x^2}{R}$
(e) $\dfrac{3\,x^3}{R^2}$

12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La dérivée de la fonction
$$x \mapsto \int_1^x f(x+t)dt$$
au point $x$

(a) n'existe pas si $f$ n'est pas dérivable
(b) est égale à $f(2x)$
(c) est égale à $2f(2x) - f(2)$.
(d) est égale à $f(2x) - f(1+x)$
(e) est égale à $2f(2x) - f(1+x)$

13. L'intégrale $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$ est égale à

(a) 2
(b) $e^2-1$
(c) $2\,(e^2+1)$
(d) $\dfrac{1}{4}\,e^{\sqrt{2}}$
(e) l'intégrale n'est pas évaluable de manière exacte

14. La valeur de l'intégrale
$$\int_0^e \ln(t)dt$$
est

(a) $-\infty$
(b) $e$
(c) 1
(d) $-1$
(e) 0

15. Le nombre de nombres réels strictement positifs $x$ pour lesquels $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ est

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 4
(e) $\infty$

16. Soient $a, b$ des nombres réels avec $a < b$. Soit $(C)$ la courbe plane d'équation $y = f(x)$ où $f(x) = (a-x)(x-b)$. Soient $p, q$ des nombres réels avec $a \le p < q \le b$, et $P$ et $Q$ les points sur $(C)$ de coordonnées $P = (p, f(p))$, $Q = (q, f(q))$. L'aire de la région délimitée par la courbe $(C)$ et la corde $(PQ)$ est :

(a) $\frac{1}{4}(q-p)^2$
(b) $\frac{1}{6}(q-p)^3$
(c) $\frac{1}{3}(q-p)^3$
(d) $\frac{1}{2}(q-p)^2$
(e) $\frac{1}{6}(q-p)^2$

17. On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ = (*conseil* : considérer d'abord $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$)

(a) 2
(b) $\dfrac{3\,e}{4}$
(c) $3\ln 2$
(d) $\dfrac{2\,\pi}{3}$
(e) $+\infty$

18. Soit $f : ]-1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant l'équation différentielle

$$(x+1)f''(x) - 3f(x)^2 - 1 = 0, \text{ où } f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

avec les conditions initiales $f(0) = 1, f'(0) = 0$ ; le couple des valeurs $(f''(0), f'''(0))$ est donné par

(a) $(4, -4)$
(b) $(-4, 4)$
(c) $(2, -4/6)$
(d) $(4, -6)$
(e) $(4, -2)$

19. Soit $y(x)$ une solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

telle que $y(1) = 1$. On a $\dfrac{dy}{dx}(0) =$

(a) $0$
(b) $\dfrac{1}{3}$
(c) $\dfrac{1}{2}$
(d) $1$
(e) $\dfrac{dy}{dx}(0)$ peut prendre différentes valeurs, qui dépendent de celle de $y(-1)$

20. Soit $\Gamma = \{(2\cos t, 3\sin t)$ tels que $t \in [0, \pi/2]\}$. Une équation de la tangente à $\Gamma$ au point $(\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$ est

(a) $2x + 3y = 0$
(b) $3x + 2y = 6\sqrt{2}$
(c) $3x - 2y = 0$
(d) $2x - 3y = -7/\sqrt{2}$
(e) $2x + 3y = 11/\sqrt{2}$

## MATHÉMATIQUES IB

21. On considère les 3 propositions suivantes, où $z$ désigne un nombre complexe non nul et $\Re$ la partie réelle :

(I) $\Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{|z|^2}\Re(z)$

(II) $|z-1| < 1 \Longrightarrow \Re\left(\frac{1}{z}\right) > \frac{1}{2}$

(III) $|z| < 1 \Longrightarrow \Re\left(\frac{1}{z}\right) > 1$

Quelles sont parmi ces propositions (égalité ou implications) celles qui sont valables pour tout nombre complexe $z$ non nul ?

(a) (I) seulement
(b) (III) seulement
(c) (I) et (II) seulement
(d) (II) et (III) seulement
(e) (I), (II) et (III)

22. Soient $a, b, c$ des nombres réels, et $P \in M_4(\mathbb{R})$ la matrice : $P = \begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix}$. Alors $P$ n'est pas inversible :

(a) pour toutes les valeurs de $a, b, c$
(b) si et seulement si $b = 0$ ou $c = 0$ ou $bc = 4a^2$
(c) si et seulement si $b = 0$ ou $c = 0$ ou $bc = 2a^2$
(d) si et seulement si $b = 0$ ou $c = 0$ ou $bc = a^2$
(e) si et seulement si $b = 0$ ou $c = 0$

23. Soit $A$ une matrice réelle carrée $n \times n$ ($n \geq 2$) et soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les $n$ valeurs propres (réelles ou complexes) de $A$.

Quelle est parmi les propositions suivantes la seule qui soit *FAUSSE*?

(a) $A$ est inversible *si et seulement si* les $\lambda_i$ sont toutes non nulles
(b) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A$, où $\prod$ désigne le produit
(c) si $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, les $\lambda_i$ sont toutes réelles et 2 à 2 distinctes
(d) si $A$ est symétrique, les $\lambda_i$ sont toutes réelles et $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$
(e) si les $\lambda_i$ sont toutes réelles strictement positives, $A$ est inversible et $\operatorname{tr} A \operatorname{tr} A^{-1} \geq n^2$

24. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

(a) $A$ et $B$ sont diagonalisables dans une base commune sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels
(b) $A$ et $B$ ont le même noyau
(c) $A$ et $B$ ont deux valeurs propres communes
(d) $A$ et $B$ ont la même image
(e) il y a une combinaison linéaire de $A$ et $B$ qui est inversible

25. Combien y a-t-il de matrices $2 \times 2$ *symétriques réelles* $M$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 4
(e) $\infty$

26. Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $P$ défini par l'équation $2x - y + 2z - 12 = 0$.

(a) $P$ est tangent à la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 4
(b) La distance de $(0,0,0)$ à $P$ est 2
(c) $P$ est orthogonal au vecteur ${}^t(1,0,-1)$
(d) La droite passant par les points $(2,-4,2)$ et $(5,2,1)$ est incluse dans $P$
(e) $P$ est parallèle à la droite passant par les points $(0,0,0)$ et $(1,1,-1)$

27. On considère la suite $u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}$. Cette suite

(a) converge vers $\frac{3}{e}$
(b) converge vers 1
(c) converge vers 2
(d) converge vers $+\infty$
(e) converge vers $\frac{4}{e}$

28. On considère la fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ si $0 < x \leq 1$ et $f(0) = 0$.

(a) $f$ est de classe $C^1$ sur $[0,1]$
(b) $f$ est dérivable sur $[0,1]$ avec $f'$ non continue en 0
(c) $f$ est continue sur $[0,1]$ et n'est pas dérivable en 0
(d) $f$ n'est pas continue en 0
(e) $f$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$

29. La quantité

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt$$

(a) est égale à $\ln(2)$

(b) est égale à 1

(c) est égale à $+\infty$

(d) n'existe pas

(e) est égale à 0

30. Soit $n \geq 0$ un entier et $\varepsilon$ un réel strictement positif. On considère l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{t^n \ln t}{(1+t^{n+1})^2} dt.$$

Quand $\varepsilon$ tend vers 0,

(a) cette intégrale ne converge pour aucune valeur de $n$

(b) pour tout $n$, cette intégrale converge vers un nombre strictement positif

(c) pour tout $n$, cette intégrale converge vers un nombre strictement négatif

(d) pour tout $n$, cette intégrale converge vers 0

(e) pour tout $n$, cette intégrale converge et, comme fonction de $n$, décroît strictement vers 0

31. La somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n} \text{ est égale à}$$

(a) $\dfrac{2\cos(\theta)}{4-5\cos(\theta)}$

(b) $\dfrac{2\sin(\theta)}{5-4\cos(\theta)}$

(c) 0 pour tout $\theta$

(d) $\dfrac{\sin(2\theta)}{5-4\cos(\theta)}$

(e) $\dfrac{\cos(2\theta)}{4-5\cos(\theta)}$

32. Soit $F$ l'espace vectoriel réel constitué des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$, qui sont solutions sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0.$$

La dimension $\dim F$ vaut

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

33. Soit l'application

$$(x,y) \xmapsto{f} (x+y, x\,y)$$

considérée pour $x, y$ réels ou complexes.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est injective

(b) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ est injective

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est surjective

(d) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ est surjective

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire

34. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y$$

admet un minimum relatif (i.e. local)

(a) en aucun point de $\mathbb{R}^2$

(b) au point $(0,0)$

(c) au point $(1,1)$

(d) aux points $(1,0)$ et $(0,1)$

(e) en une infinité de points de $\mathbb{R}^2$

35. Chacun des 4 réacteurs d'un avion a, indépendamment des autres, la probabilité $p$ de tomber en panne en plein ciel.
Sachant que la panne d'au moins deux réacteurs empêche l'avion de poursuivre son vol, quelle est la probabilité d'arriver à destination ?

(a) $(1-p)^3\,(1+3\,p)$

(b) $(1-p)\,(1+2\,p^3)$

(c) $1 - 6\,p^2 + 4\,p^3 - p^4$

(d) $1 - 6\,p^2$

(e) $1 - 4\,p$