ARTS ET MÉTIERS ParisTech — MINES NANCY — MINES Saint-Étienne — École des Ponts ParisTech — l'X École Polytechnique — ENSAE ParisTech

ENSTA ParisTech — ESPCI ParisTech — INSTITUT d'OPTIQUE GRADUATE SCHOOL — ISAE SUPAERO — MINES ParisTech — TELECOM ParisTech — TELECOM Bretagne

NOM	SOUARE	N° CANDIDAT	M160755E
PRENOM	PAPA MADIABE	CENTRE D'ECRIT	Mines Saint-Etienne

TEST SCIENTIFIQUE : 1ère partie

NE PAS OUVRIR LE FASCICULE AVANT D'Y ÊTRE INVITÉ

INSTRUCTIONS

- La durée de cette première partie est de 2h.

- Chaque question ou affirmation de ce test est suivie de cinq réponses ou compléments possibles. Sélectionnez celle qui vous semble la plus appropriée dans chacun des cas et marquez la case correspondante dans la fiche de réponse jointe. Les réponses multiples seront considérées comme fausses.

- Vous commencerez par traiter la partie
  Mathématiques IA Questions 01 à 20.
  Puis, en fonction de votre formation d'origine, vous choisirez entre :
  [_] Mathématiques IB Questions 21 à 35
  ou
  [_] Chimie I Questions 36 à 50
  Vous indiquerez ce choix par une croix dans une des cases ci-dessus prévues à cet effet. Notez que la partie Chimie I est obligatoire pour les candidats à ESPCI ParisTech.

- **Le fascicule complet doit être rendu à la fin du test.**

- Il n'est pas permis d'utiliser du brouillon séparé ; veuillez utiliser le verso des pages du fascicule.

- Ne pas dégrafer le fascicule.

- Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

- Calculatrices et dictionnaires électroniques ne sont pas autorisés.

- +1 point pour une réponse juste, −1/4 point pour une réponse fausse, 0 pour une absence de réponse.

- Inscrivez vos nom, prénom, numéro de candidat et centre d'écrit sur la première page de ce fascicule.

MATHÉMATIQUES IA

1. Le plus grand entier naturel n tel que 2^n divise $16!$ (factoriel 16) est
   (a) 5
   (b) 8
   (c) 10
   (d) 12
   (e) 15

2. La valeur de $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i}\right)^6$ est
   (a) i
   (b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$
   (c) $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$
   (d) $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$
   (e) 1

3. Soit $x \in [-1, +1]$. La valeur de $\cos(\arcsin(x))$ est
   (a) $|x|$
   (b) $1-|x|$
   (c) $\pi/2 - x$
   (d) $\sqrt{1-x^2}$
   (e) x

4. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, l'aire du triangle de sommets $(1,\ 1), (2,\ 2), (0,\ 3)$ est
   (a) 0
   (b) 1
   (c) 3/2
   (d) 7/4
   (e) 2

5. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, la projection orthogonal du point $(5,\ -1)$ sur la droite $y = \frac{2}{3}x$ est le point
   (a) (0,0)
   (b) (3, 2)
   (c) (1,5)
   (d) (-3, -2)
   (e) (6,4)

6. La limite, quand x tend vers 0 de $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x^2)}$ est
   (a) -1
   (b) 0
   (c) 1/2
   (d) 1
   (e) $+\infty$

7. La quantité $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\tan x}{x^3}\right)$ est égale à
   (a) $-\frac{1}{6}$
   (b) $-\frac{1}{3}$
   (c) 0
   (d) $\frac{1}{6}$
   (e) $\frac{1}{3}$

8. La somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n\,(2x+1)^{n-1}$ est égale à
   (a) $-\frac{1}{2x}$ pour $x \neq 0$
   (b) $\left(\frac{1}{2x}\right)^2$ pour $-1 < x < 0$
   (c) $1-\ln(-2x)$ pour $-\frac{e}{2} < x < 0$
   (d) $\ln(-\frac{1}{2x})$ pour $x < 0$
   (e) la série ne converge pour aucune valeur de x dans $\mathbb{R}$

9. Soient a et b deux nombres réels avec $a > 1$ et $b > 1$.
   La valeur de l'intégrale $\int_a^b \frac{1}{x\ln x}\,dx$ est
   (a) $\ln b - \ln a$
   (b) $\frac{\ln b}{\ln a} - \frac{\ln a}{\ln b}$
   (c) $\ln\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)$
   (d) $\frac{1}{b\ln b} - \frac{1}{a\ln a}$
   (e) On ne peut pas calculer explicitement cette intégrale

10. Soit $F(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2}dt$ pour tout $x > 1$. $F'(x) =$
   (a) $e^{x^2}\sqrt{\ln x}$
   (b) $e^2\sqrt{x}$
   (c) x
   (d) $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$
   (e) $\sqrt{e^{x^2}}$

11. Soit P un polynôme de degré 10, tel que

$$P(0) = \cdots = P(9) = 0.$$

Quelle relation a-t-on entre $P(10)$ et $P(11)$?

(a) $P(11) = -P(10)$
(b) $P(11) = -\frac{9}{10}P(10)$
(c) $P(11) = P(10)^2$
(d) $P(11) = 11\,P(10)$
(e) il n'y a pas de relation particulière

12. Soit $P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x$; le nombre de racines réelles deux à deux distinctes de $P(x) = 0$ est

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 4

13. Pour combien de valeurs réelles de m le vecteur $(m, 1, 1)$ est-il une combinaison linéaire des deux vecteurs $(-1, -m, -1)$ et $(-1, -1, -m)$?

(a) aucune valeur
(b) une valeur
(c) deux valeurs
(d) trois valeurs
(e) toutes les valeurs

14. Soient trois nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonalisable dans le corps $\mathbb{R}$ *si et seulement si* on a

(a) rien de plus
(b) $c \neq 0$
(c) $c \neq 1$
(d) $a = 0$, et si $c = 1$ alors $b = 0$
(e) $c \neq 1$, ou alors $c = 1$ et $a = b = 0$

15. L'ensemble des valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est

(a) $\{-2, 0, 2\}$
(b) $\{-2, 0\}$
(c) $\{0, 1, 2\}$
(d) $\{0, 1\}$
(e) $\{0, 2\}$

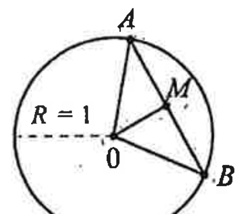
16. Toutes les matrices considérées dans cette question sont des matrices réelles 2×2. Soit $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ une matrice avec $\alpha \neq \beta$. L'ensemble des matrices M telles que $\Delta M = M\Delta$ est

(a) $\{\mathrm{Id}_2\}$
(b) L'ensemble de toutes les matrices
(c) $\{\lambda \mathrm{Id}_2 \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}\}$
(d) L'ensemble des matrices diagonales
(e) L'ensemble des matrices triangulaires

17. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs ${}^t(-1, 2, 1)$, ${}^t(2, 3, 3)$, ${}^t(4, -1, 1)$

(a) est de dimension 1
(b) est orthogonal à ${}^t(3, 5, -7)$
(c) est de dimension 3
(d) contient le vecteur ${}^t(1, 5, 2)$
(e) est orthogonal aux vecteurs ${}^t(0, 1, 1)$ et ${}^t(1, 1, 0)$

18. Soient A et B deux points distincts du cercle unité de $\mathbb{R}^2$, et soit M le milieu du segment AB.



On considère les 3 propositions :

(I) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 1 - \frac{AB^2}{4}$

(II) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 - \frac{AB^2}{2}$

(III) $\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = OM\, AB$

Quelles sont parmi ces propositions celles qui sont exactes ?

(a) (I) seulement
(b) (III) seulement
(c) (I) et (II) seulement
(d) (II) et (III) seulement
(e) (I), (II) et (III)

19. Soit H la région du plan

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \pi \quad \text{et} \quad 0 < \rho < 1 + \cos\theta\}$$

où ρ et θ désignent les coordonnées polaires du point $M = (x,y)$.
L'aire de H vaut

(a) $\frac{3\pi}{4}$
(b) π
(c) $\frac{5\pi}{4}$
(d) $\frac{3\pi}{2}$
(e) $\frac{7\pi}{4}$

20. Un tiroir contient cinq paires de gants indiscernables entre elles et cinq paires de chaussettes indiscernables entre elles. On choisit au hasard deux gants et deux chaussettes. On dénote par p_g la probabilité qu'une paire de gants a été tirée et par p_c la probabilité qu'une paire de chaussettes a été tirée. La valeur de (p_g, p_c) est

(a) $(5/9, 1)$
(b) $(4/9, 4/9)$
(c) $(2/9, 1)$
(d) $(4/9, 5/9)$
(e) $(4/9, 1)$

MATHÉMATIQUES IB

36. Compte tenu de la valeur de $\sum_{k=0}^{4} e^{k\frac{2i\pi}{5}}$, $\cos(\frac{2\pi}{5}) =$

   (a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
   (b) $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
   (c) $-\frac{\sqrt{5}-1}{8}$
   (d) $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$
   (e) $\cos(\frac{2\pi}{5})$ n'admet pas d'expression algébrique de cette sorte

37. Vous jetez un dé non pipé, et le résultat obtenu (entre 1 et 6) détermine le nombre de fois que vous lancez une pièce de monnaie équilibrée.
La probabilité d'obtenir à chaque fois "pile" est :

   (a) $\frac{1}{6}$
   (b) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$
   (c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$
   (d) $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^6$
   (e) $\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^6}\right)$

38. Le nombre $g(n,p)$ de façons de répartir un ensemble de np objets en n sous-ensembles contenant chacun p éléments est

   (a) $g(p,n)$
   (b) $\frac{(np)!}{(p!)^n n!}$
   (c) $\frac{(np)!}{(p!n!)^n}$
   (d) $\frac{(np)!}{n(p!)^n}$
   (e) $\frac{n!p!}{np}$

39. Le nombre de valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(\pi n/5 + 1/n))_n$ est

   (a) 3
   (b) 5
   (c) 6
   (d) 10
   (e) infini

40. Soit $1+ax+bx^2+o(x^2)$ un développement limité de $\sqrt{1+x+x^2}$ au voisinage de $x=0$. Le couple (a,b) est égal à

   (a) $(1/2, 3/8)$
   (b) $(1, 3/4)$
   (c) $(1/2, 5/8)$
   (d) $(1, -3/8)$
   (e) $(1/2, 1/8)$

41. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x^3 - 1$$

et soit f^{-1} la fonction inverse (ou réciproque) de f. Alors

   (a) f^{-1} est bornée sur $\mathbb{R}$
   (b) il existe $x < 0$ tel que $f^{-1}(x) = x$
   (c) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3}$
   (d) f^{-1} n'est pas continue sur $[-1,1]$
   (e) il existe un point x où f^{-1} n'est pas dérivable

42. La valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$ est

   (a) $\frac{\pi}{2}$
   (b) $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$
   (c) $\pi + \ln 2$
   (d) $+\infty$
   (e) $\ln 2$

43. Soit F l'ensemble des solutions $y(x)$ à valeurs complexes de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$y'' + y = e^{ix}.$$

   (a) $\exists y \in F$ qui est une fonction périodique sur $\mathbb{R}$
   (b) $\exists y \in F$ qui est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$
   (c) $\exists y \in F$ telle que $\lim_{|x|\to+\infty} \left|\frac{y(x)}{x}\right| = +\infty$
   (d) $\exists y \in F$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{y(x)}{x}\right| = |y'(0)|$
   (e) $\forall y \in F$, la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{y(x)}{x} \in \mathbb{C}$ se prolonge par continuité en 0

44. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une application continue. La fonction

$$x \in \mathbb{R}_+ \ , \ f(x) = \int_0^x \sin u \, g(x-u)\, du$$

est une solution y de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$:

(a) $y' = g(0) \sin x$
(b) $(\cos x)\, y' + (\sin x)\, y = (\cos x)\, g(x) - g(0)$
(c) $(\sin x)\, y' - (\cos x)\, y = (\sin x)\, g(x)$
(d) $y'' + y = g(x)$
(e) si g n'est pas dérivable, f non plus en général

45. La longueur de la courbe définie par $x(t) = t\cos(1/t)$, $y(t) = t\sin(1/t)$, pour $t \in]0,1]$, et $(x(0), y(0)) = (0,0)$, est

(a) 2
(b) $2\sqrt{2}$
(c) π
(d) 4
(e) infinie

46. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, le plan qui est tangent à la surface $xy^3 + yz^3 + 2zx^3 = 0$ au point $M = (1,-1,1)$

(a) est orthogonal au vecteur ${}^t(5,4,1)$
(b) contient la droite passant par M et parallèle à ${}^t(2,-3,1)$
(c) a pour équation $5x + 4y - z = 1$
(d) contient la droite passant par M et parallèle à $\overrightarrow{OM}$
(e) est orthogonal au vecteur ${}^t(-1,4,5)$

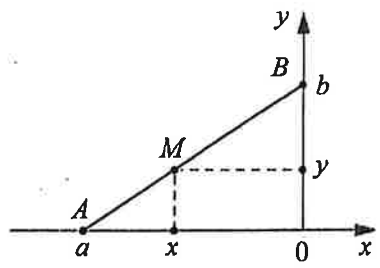
47. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$. Un endomorphisme f de E dans E est injectif *si et seulement si*

(a) E est la somme directe de son noyau $f^{-1}(\{0\})$ et de son image $f(E)$
(b) $\exists g : E \to E$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$
(c) $\dim f^{-1}(\{0\}) \leq \dim f(E)$
(d) $\mathrm{Id}_E - f$ est surjectif
(e) f et $(\mathrm{Id}_E - f)$ ont la même image.

48. Soit A une matrice complexe $n \times n$ $(n \geq 2)$ et soit $B = A^2$.
Quelle est parmi ces propositions la seule qui est *FAUSSE* ?

(a) A diagonale $\Longrightarrow B$ diagonale
(b) A diagonalisable $\Longrightarrow B$ diagonalisable
(c) B diagonale $\Longrightarrow A$ diagonalisable
(d) $\mu \in \mathbb{C}$ valeur propre de $A \Longrightarrow \mu^2$ valeur propre de B
(e) $\lambda = \mu^2 \in \mathbb{C}$ valeur propre de $B \Longrightarrow \mu$ ou $-\mu$ (ou μ et $-\mu$) valeur(s) propre(s) de A

49. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère un point fixe $M = (x,y)$ avec $x < 0$ et $y > 0$. Pour tout $p > 0$, on note $A = (a,0)$ $(a < 0)$ et $B = (0,b)$ $(b > 0)$ les points d'intersection des axes de coordonnées avec la droite de pente p contenant M.



La longueur $L(p)$ du segment AB est minimum lorsque p vaut

(a) 1
(b) $-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$
(c) $\left(-\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$
(d) $-\frac{y}{x}$
(e) $\left(\frac{y}{x}\right)^2$

50. D'après l'inégalité de Cauchy – Schwarz, la valeur minimum de $\frac{x^4}{4} + y^4 + z^4$ sur la *sphère* unité de $\mathbb{R}^3$ euclidien est

(a) $\frac{1}{8}$
(b) $\frac{1}{6}$
(c) $\frac{17}{100}$
(d) $\frac{3}{16}$
(e) $\frac{1}{4}$