GEI-UNIV

ECOLE DES PONTS PARISTECH, ISAE-SUPAERO,
ENSTA PARIS, TELECOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ETIENNE, MINES NANCY, IMT ATLANTIQUE,
ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH – PSL.
ECOLE POLYTECHNIQUE,
ARTS et METIERS PARISTECH,
ESPCI PARIS, SUPOPTIQUE, ENAC.

Admission par voie universitaire

EPREUVE COMMUNE DE MATHÉMATIQUES et PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures.

L'emploi de tout document (dictionnaires, imprimés, ...) et de tout appareil (traductrices, calculatrices électroniques, ...) est interdit dans cette épreuve.

Cette épreuve est un questionnaire à choix multiples.
Les questions sont numérotées de 1 à 20 pour l'épreuve de mathématiques, et de 21 à 40 pour l'épreuve de physique.

Chaque question peut admettre, de façon variable, entre une et cinq réponses correctes. Dans toutes les questions vous indiquerez les assertions correctes.
Exprimer les réponses exactes en noircissant la ou les cases correspondantes.
Toute réponse incorrecte sera pénalisée.

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Respectez scrupuleusement les consignes de remplissage des cases du document réponse.

L'énoncé de cette épreuve comporte 16 pages de texte.

QCM - Mathématiques
Questions 1 à 20

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{9-x^2} + 6x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   A. f est concave sur $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$.
   B. f est concave sur $]-1;1[$.
   C. f présente un maximum local en 3.
   D. f présente un minimum local en 3.
   E. L'équation $f(x) = 18$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f une fonction définie et de classe C^4 sur un voisinage de 0 telle que le développement limité d'ordre 3 de f en 0 est : $f(x) = 1 - x + 5x^2 - 15x^3 + o(x^3)$.
   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x^2 - x + 1$.
   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ par $h(x) = \frac{e^{2x}}{1+3x}$.

   A. La courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.
   B. $f''(0) = 5$. X
   C. La courbe représentative de f est au-dessous de la courbe représentative de g au point d'abscisse 0.
   D. f et h ont même développement limité d'ordre 3 en 0.
   E. f et h ont même développement limité d'ordre 2 en 0

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{1/x}} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

   A. f est continue en 0.
   B. f est dérivable en 0.
   C. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
   D. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
   E. La droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.

X

4. On considère la fonction f d'une variable réelle définie sur $I = \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ par :

$$f(x) = -x^2 + \ln(2x-3).$$

A. f est injective sur I.
B. f est injective sur $]2;+\infty[$.
C. f est surjective de $I = \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ vers $\mathbb{R}$.
D. f est bijective de $]2;+\infty[$ vers $]-\infty;-4[$.
E. f est surjective de $I = \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ vers $]-\infty;-4[$.

5. Soit f la fonction définie pour $x > 0$ et $y > 0$ par :

$$f(x;y) = -\frac{y^4}{8x} - 2x + 4y + 1.$$

A. Le point $A = (1;2)$ est un point critique (ou stationnaire) de f.
B. Le point $B = (2;1)$ est un point critique (ou stationnaire) de f.
C. La matrice hessienne de f en A est égale à $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.
D. f présente en A un minimum local.
E. f présente en B un maximum local.

6. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{u_n+4}$.

A. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sans avoir de limite.
B. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
C. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.
D. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
E. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique telle que : $u_{25} = -24,02$ et $u_{250} = -24,002$.

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -24$.
B. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
C. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
D. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sans avoir de limite.
E. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$u_{n+1} - u_n$

8. On considère la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)^n$.

A. Cette série converge.
B. Cette série diverge vers $+\infty$.
C. Cette série diverge vers $-\infty$.
D. Les séries $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ sont de même nature.
E. Cette série converge et la somme de cette série est supérieure à 1.

9. On considère la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ telle que : pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

A. On peut affirmer que cette série converge.
B. On peut affirmer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ converge.
C. On peut affirmer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge.
D. On peut affirmer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} (u_n)^3$ diverge.
E. On peut affirmer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \sqrt{u_n}$ diverge.

10. Mme Michel cherche son chat. Il se cache nécessairement dans un garage ou une cuisine. Trois fois sur huit, il va chez son voisin M. Lustucru. Dans ce cas il a deux fois plus de chances de se trouver dans son garage que dans sa cuisine.
S'il n'est pas chez M. Lustucru, il est nécessairement chez Mme Michel, et alors il y a quatre fois plus de chances qu'il soit caché dans la cuisine que dans le garage.

A. Il y a plus de chances de trouver le chat dans une cuisine que dans un garage.
B. Le chat est retrouvé dans un garage. Il n'y a alors qu'une chance sur trois pour que ce soit celui de Mme Michel.
C. Il y a autant de chances que le chat soit dans la cuisine de Mr Lustucru que dans le garage de Mme Michel.
D. Il y a deux fois plus de chances que le chat soit dans le garage de Mr Lustucru que dans la cuisine de Mme Michel.
E. Il y a trois chances sur quatre pour que le chat soit dans une cuisine.

11. Soit $p \in]0;1]$. Soit $(X;Y)$ un couple de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé Ω muni de la probabilité P, tel que :

$$X(\Omega) = \{0,1\};\ Y(\Omega) = \{-2;0\};$$

$$P(X=0;Y=0) = \frac{1}{6};$$

$$P(X=1;Y=-2) = P(X=1;Y=0) = p.$$

A. Il existe une valeur de p pour laquelle X et Y sont indépendantes.

B. Il existe une valeur de $p > \frac{1}{2}$ qui convienne.

C. Il existe une valeur de $p > \frac{1}{3}$ qui convienne.

D. $Cov(X;Y) > 0$ pour $p < \frac{1}{3}$.

E. La valeur maximum de $Cov(X;Y)$ est $\frac{1}{6}$.

12. On dispose d'un sac contenant 3 boules blanches et 2 boules rouges indiscernables au toucher. On demande successivement à 10 personnes de choisir au hasard une boule du sac, de noter sa couleur, et de remettre la boule tirée dans le sac. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

A. L'espérance de X est supérieure ou égale à 3.

B. La variance de X est égale à 60% de son espérance.

C. $9 \times P(X = 6) = 4 \times P(X = 4)$.

D. $4 \times P(X = 6) = 9 \times P(X = 4)$.

E. La variance de X est supérieure ou égale à 2.

13. Soit k un réel. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x < 2$ et $f(x) = \frac{k}{x^3}$ si $x \geq 2$.

A. Il existe une valeur de k supérieure ou égale à 10 pour que f soit considérée comme la densité d'une variable aléatoire continue sur $\mathbb{R}$.

B. Il existe une valeur de k inférieure ou égale à 12 pour que f soit considérée comme la densité d'une variable aléatoire continue sur $\mathbb{R}$.

C. Si f est considérée comme la densité d'une variable aléatoire continue sur $\mathbb{R}$ notée X, alors $E(X) \geq 3$ où $E(X)$ désigne l'espérance de X.

D. Si f est considérée comme la densité d'une variable aléatoire continue sur $\mathbb{R}$ notée X, alors $E(X) \leq 6$ où $E(X)$ désigne l'espérance de X.

E. Si f est considérée comme la densité d'une variable aléatoire continue sur $\mathbb{R}$ notée X, alors la probabilité de l'évènement $(X \geq 10)$ est égale à 0,04.

14. On considère la fonction $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$ pour x réel. On admet que f est développable en série entière au voisinage de 0 dont le rayon de convergence est R.

A. $R = +\infty$.

B. $R = 1$.

C. Pour tout x tel que $|x| < R : f(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$.

D. Pour tout x tel que $|x| < R : f(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-1)} x^n$.

E. Pour tout x tel que $|x| < R : f(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n(n-1)} x^n$.

15. Soit a un réel strictement positif. Soit l'intégrale $I_a = \int_1^a \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$.

A. $\lim_{a \to +\infty} I_a = \ln 2$.

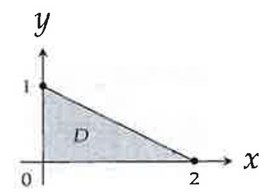
B. $\lim_{a \to +\infty} I_a = 0$.

C. $\lim_{a \to +\infty} I_a = +\infty$.

D. $\lim_{a \to 0^+} I_a = \ln 2$.

E. $\lim_{a \to 0^+} I_a = 0$.

16. Soit D le domaine grisé du plan ci-dessous. Alors $\iint_D (3x+y)\, dxdy$ est égale à :



$\int_0^1 \int_0^2 3x + y$

A. $\int_0^2 \left(-\frac{11}{8}t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{1}{2}\right) dt$.

B. $\int_0^1 \left(-\frac{11}{8}t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{1}{2}\right) dt$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\int_0^2 (4t^2 - 10t + 6) dt$.

E. $\int_0^1 (4t^2 - 10t + 6) dt$.

17. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire dont M est la matrice représentative dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

A. f est injective.

B. f est surjective.

C. f est bijective.

D. $dim(Ker(f)) = 2$.

E. $dim(Im(f)) = 2$.

rang = 3 → dim Kerf = 0

r = 3

3 = 3 - 0

2

4 + 2

4 - 2 = 2 2 - 1 = 1

18. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 10 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\Big| \, 2-\lambda$$

A. M est diagonalisable.
B. 0 est valeur propre de M.
C. Le produit des valeurs propres de M est égal à 80.
D. La somme des valeurs propres de M est égale à 16.
E. 1 est valeur propre de M.

19. Soient $\vec{u} = (2;3;0)$ et $\vec{v} = (4;0;-3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel muni du produit scalaire usuel, et P le plan de l'espace affine passant par le point $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et dont une base est $\{\vec{u};\vec{v}\}$. Soit N le point $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

A. Le projeté orthogonal de N sur le plan P est $H \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
B. Le projeté orthogonal de N sur le plan P est $H \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
C. La distance du point N au plan P est égale à la distance MN.
D. La distance du point N au plan P est égale à $\sqrt{53}$.
E. La distance du point N au plan P est égale à $\sqrt{29}$.

20. Soit l'équation différentielle $(E) : y' \cos x + y \sin x = 1$ pour tout x réel.

A. Pour toute fonction f solution de (E), la suite $(f(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
B. Pour toute fonction f solution de (E), la suite $(f(2n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
C. Il existe une fonction f solution de (E) telle que la suite $(f(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante.
D. Il existe une fonction f solution de (E) telle que la suite $(f(2n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante.
E. Pour toute fonction f solution de (E), $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0)$.

FIN de l'EPREUVE de MATHEMATIQUES

QCM - Physique
Questions 21 à 40

21. Quelques questions sur les unités de grandeurs manipulées couramment en Physique :

A. Une accélération s'exprime en m^2/s^2.
B. Le travail d'une force s'exprime en $N.m^{-1}$.
C. L'unité de la masse dans le système international est le gramme.
D. Un champ électrique peut s'exprimer en $V.m^{-1}$ ou en $N.C^{-1}$.
E. La pression peut s'exprimer en $J.m^{-3}$.

22. On donne ci-dessous les quatre premières lignes de la classification périodique de Mendeleïev :

1	1 H 1.0079																	2 He 4.0025 Hélium
2	3 Li 6.941 Lithium	4 Be 9.0122											5 B [illegible] Bore	6 C 12.011 Carbone	7 N 14.007 Azote	8 O 15.999 Oxygène	9 F [illegible] Fluor	10 Ne [illegible]
3	11 Na 22.990 Sodium	12 Mg 24.305											13 Al 26.982 Aluminium	14 Si 28.086 Silicium	15 P 30.974	16 S 32.065 Soufre	17 Cl 35.453 Chlore	18 Ar [illegible]
4	19 K [illegible]	20 Ca 40.078	21 Sc 44.956	22 Ti 47.867 Titane	23 V 50.942 Vanadium	24 Cr 51.996 Chrome	25 Mn 54.938 Manganèse	26 Fe 55.845 Fer	27 Co [illegible] Cobalt	28 Ni 58.693 Nickel	29 Cu [illegible] Cuivre	30 Zn [illegible] Zinc	31 Ga 69.723 Gallium	32 Ge 72.64 Germanium	33 As 74.922 Arsenic	34 Se 78.96	35 Br [illegible]	36 Kr [illegible]

~~A.~~ Les halogènes correspondent à la dernière colonne.
~~B.~~ On peut créer facilement l'ion Ne^-.
C. La configuration électronique de l'oxygène est $1s^2 2s^2 2p^6$.
D. La configuration électronique de l'azote est $1s^2 2s^2 2p^3$.
E. Le silicium est un atome pentavalent.

23. Dans sa forme la plus générale, l'équation de Schrödinger unidimensionnelle régissant le comportement de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ associée à une particule de masse m s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t).$$

A. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$ est le terme correspondant à l'énergie cinétique.
B. La probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$ est donnée par $|\Psi(x,t)|^2$.
C. La fonction d'onde $\Psi(x,t)$ est une onde réelle se propageant dans l'espace (unidimensionnel dans ce cas).

D. $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$.

E. Si $\Psi_1(x,t)$ et $\Psi_2(x,t)$ sont solutions de l'équation de Schrödinger, alors $\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t)$ est également solution.

24. On considère une particule quantique de masse m piégée dans un puits de potentiel unidimensionnel infini de largeur l :

En

A. Dans un puits carré, les énergies quantifiées sont proportionnelles à $\frac{1}{n^2}$, n étant le nombre quantique (entier) associé à chaque niveau d'énergie.

B. Plus l est grand, plus les énergies E_n et E_{n+1} de deux niveaux quantifiés consécutifs sont espacées.

✓ C. La longueur d'onde de de Broglie associée à une particule piégée d'énergie E_n est $\lambda_n = \frac{2l}{n}$.

D. La probabilité de trouver la particule à l'extérieur du puits est non-nulle.

✓ E. L'énergie du niveau fondamental est non-nulle.

25. La loi de Planck caractérisant le rayonnement thermique donne la densité spectrale d'énergie électromagnétique d'un corps noir $\rho(\nu, T)$ à la température T et pour une fréquence ν. Son expression est donnée par la relation suivante :

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1},$$

c étant la célérité de la lumière dans le vide, h la constante de Planck et k_B la constante de Boltzmann.

A. L'unité de $\rho(\nu, T)$ est le $J.m^{-3}.Hz^{-1}$.

B. Pour une température T donnée, la longueur d'onde pour laquelle le corps noir rayonne un maximum d'énergie est donnée par la loi $\lambda_{max} = \frac{A}{T}$ avec $A = 2.898\ \mu m.K$.

Si $T = 300K$, un corps noir émet majoritairement dans le spectre visible.

C. La valeur de la constante de Planck est $h \approx 6.626 \times 10^{-34}\ J/s$.

D. Un corps noir est un émetteur thermique parfait.

E. Bien que le Soleil ne soit pas considéré comme un corps noir, son rayonnement émis peut être décrit par cette loi.

26. En statique des fluides :

A. On considère deux points d'altitudes z_1 et z_2, la différence de pression est donnée par l'expression $P_1 - P_2 = \rho g(z_2 - z_1)$ (ρ est la masse volumique et g l'accélération de la pesanteur).

B. À une profondeur de 10 m sous l'eau, un plongeur reçoit une pression de 1 bar. 2 bar.

C. La pression est une force exercée par unité de volume. surface.

D. Dans le modèle de l'atmosphère isotherme, la formule du nivellement barométrique donnant la pression à une altitude h est $P(h) = P(0).e^{\frac{Mgh}{RT}}$, M étant la masse molaire de l'air, g l'accélération de la pesanteur, R la constante des gaz parfaits et T la température.

E. On considère un glaçon flottant à la surface d'un verre d'eau. Si le verre est initialement rempli à ras-bord, il va déborder lorsque le glaçon fondra à cause de la quantité d'eau supplémentaire apportée.

27. On considère 10 moles d'un gaz parfait monoatomique contenues dans un cylindre hermétique (aucun échange de matière avec l'extérieur). Les parois de ce cylindre permettent les échanges d'énergie par transferts thermiques et il est muni d'un piston pouvant coulisser sans frottement et pouvant ainsi modifier le volume du gaz. On donne la constante des gaz parfaits $R = 8.31\ J.mol^{-1}.K^{-1}$ et $\ln 2 \approx 0.7$.

A. Dans les conditions de température $T = 300\ K$ et $p = 10^5\ pa$, le volume du gaz est $V \approx 250\ L$.

B. A température constante, le piston est enfoncé très lentement de façon à diviser le volume du gaz par 2. Dans ces nouvelles conditions, la pression du gaz est égale à $2 \times 10^5\ pa$.

C. Lors de cette transformation, la variation d'énergie interne est $\Delta U = 0$.

D. La chaleur Q reçue par le gaz lors de cette transformation est négative.

E. Le travail W reçu par le gaz au cours de la transformation est $W \approx 17\ kJ$.

28. En thermodynamique :

A. La chaleur Q et le travail W sont des variables d'état d'un système.

B. Pour une machine thermique fonctionnant avec une source froide à la température T_f et une source chaude à la température T_c, le rendement idéal de Carnot est $\eta = 1 + \frac{T_f}{T_c}$.

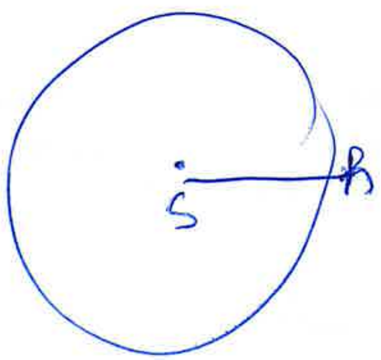
C. La capacité calorifique est la quantité de chaleur qu'il faut fournir pour élever la température d'un système d'un degré.

D. Les variables extensives sont proportionnelles à la quantité de matière, exemple la pression, la température.

E. La paroi d'un système fermé est dite adiabatique lorsqu'il n'échange avec l'extérieur que de la chaleur.

29. Toutes les propositions ci-dessous sont liées au second principe de la thermodynamique, lesquelles sont vraies ?
   - A. L'entropie d'échange d'un système isolé est négative.
   - B. L'unité de l'entropie est le $J.K$.
   - C. Une transformation adiabatique réversible peut être caractérisée comme isotherme.
   - D. Au cours d'une transformation irréversible, l'entropie de création d'un système est positive.
   - E. La variation d'entropie d'un système au cours d'une transformation quelconque est toujours positive ou nulle.

30. Dans le référentiel géocentrique (supposé Galiléen), on s'intéresse au mouvement circulaire uniforme d'un satellite de masse m positionné en orbite équatoriale à l'altitude h par rapport à la surface de la Terre. Le rayon terrestre est noté R_T, la masse terrestre M_T et on donne la constante de gravitation universelle $\mathscr{G} = 6.67\times10^{-11}$ SI.
   - A. Le théorème de l'énergie cinétique permet de montrer que le mouvement du satellite est bien circulaire uniforme.
   - B. La troisième loi de Kepler permet de déterminer la période du satellite.
   - C. L'expression de la norme de la vitesse du satellite est $v = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_T}{h}}$.
   - D. Entre le sol et l'orbite circulaire d'altitude h, la variation d'énergie potentielle du satellite est $\Delta E_p = \mathscr{G}M_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right)$.
   - E. L'unité de la constante de gravitation universelle $\mathscr{G}$ est le $N.m^2.kg^{-2}$.



31. On s'intéresse à la description du mouvement d'un point M depuis deux référentiels Galiléens nommés $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ (voir Fig. 1). Le référentiel $\mathscr{R}'$ est en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\vec{e_x}$ parallèle à l'axe Ox du référentiel $\mathscr{R}$.

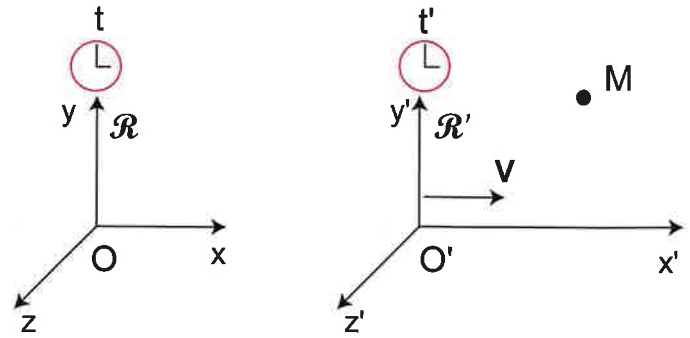


Fig. 1 : Description des deux référentiels Galiléens.

On note (x, y, z, t) et (x', y', z', t') les coordonnées du point M dans les référentiels $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$.
   - A. Nous avons la relation $x = x' + Vt$.
   - B. En relativité Galiléenne, nous avons $t \neq t'$.
   - C. On note $\vec{v}$ le vecteur vitesse du point M dans $\mathscr{R}$ et $\vec{v}'$ le vecteur vitesse du point M dans $\mathscr{R}$. Nous avons la relation $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$.
   - D. Lors d'un changement entre deux référentiels galiléens, l'accélération du point M est une grandeur considérée comme absolue.
   - E. Lors d'un changement entre deux référentiels galiléens, la vitesse est une grandeur considérée comme absolue.

32. On s'intéresse au mouvement d'une masse m au voisinage d'une position d'équilibre $x = 0$. Cette masse m est attachée à un ressort fixé à un mur et est de constante de raideur k.

Sans frottements, l'équation différentielle régissant la position $x(t)$ de la masse m et caractérisant ainsi les oscillations autour de la position d'équilibre est :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 = 0.$$

La solution de cette équation différentielle est $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$ pour des conditions initiales $x(t=0) = x_0$ et $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

A. Cette équation différentielle est valide pour toutes les amplitudes d'oscillations possibles.

B. La pulsation propre ω_0 des oscillations est égale à $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

C. L'énergie cinétique de la masse m est $E_c = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$.

D. L'énergie mécanique de cet oscillateur est $E_m = \frac{1}{2}kx^2(t)$.

E. En présence de frottements, l'équation différentielle ci-dessus se met sous la forme $\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \alpha\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$, où α est un coefficient positif.

33. On s'intéresse aux propriétés de l'image d'un objet AB réalisée avec 4 montages utilisant des lentilles minces (voir Fig. 2) :

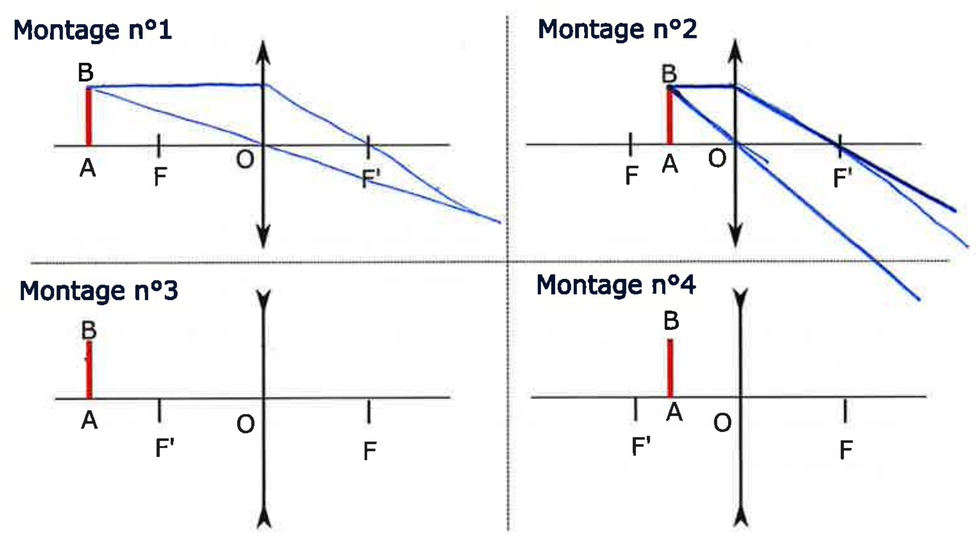


Fig. 2 : Description des montages

Quelles propositions ci-dessous sont vraies :

A. Avec le montage n°1, l'image de l'objet AB est réelle et droite.

B. Avec le montage n°2, l'image de l'objet AB est virtuelle et droite.

C. Avec le montage n°3, l'image de l'objet AB est réelle et droite.

D. Avec le montage n°4, l'image de l'objet AB est réelle et droite.

E. Le montage n°2 correspond à celui d'une loupe.

34. On s'intéresse à la diffraction d'une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ par une fente de largeur a.

A. Le principe d'Huygens-Fresnel stipule que chaque point de l'ouverture se comporte comme une source secondaire émettant une onde plane monochromatique de même longueur d'onde λ.

B. Quelle que soit la distance entre la fente et l'écran, la figure de diffraction observée sur l'écran est une fonction sinus cardinal (on rappelle $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$).

C. En champ lointain l'écart angulaire de la tache de diffraction est proportionnel à $\frac{\lambda}{a}$.

D. La figure de diffraction ci-dessous correspond à celle d'une fente horizontale.

E. Le phénomène de diffraction ne peut s'observer qu'avec des ondes électromagnétiques ou mécaniques (onde acoustique par exemple).

35. On s'intéresse à un interféromètre de Michelson réglé pour observer des anneaux sur un écran. La Fig. 3 représente le schéma de principe de l'interféromètre ainsi que son schéma équivalent :

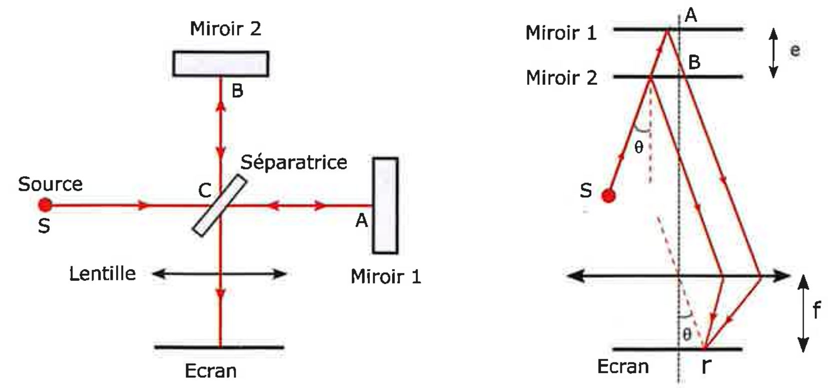


Fig. 3 : Interféromètre de Michelson.

L'intensité lumineuse au niveau de l'écran est de la forme $I(r) = I_0\,(1 + \cos\varphi(r))$ où $\varphi(r)$ est le déphasage au point r entre les deux faisceaux se superposant sur l'écran. On note λ la longueur d'onde de la source lumineuse supposée ici monochromatique.

A. On parle de dispositif en coin d'air lorsque l'on observe des anneaux.

B. La différence de marche entre les deux rayons est $\delta = 2e\cos\theta$.

C. La différence de marche au point r est $\delta(r) = 2e\left(1 - \frac{r^2}{2f^2}\right)$.

D. Nous avons une frange claire en $r = 0$ si $e = \lambda$.

E. Il faut modifier l'angle de la séparatrice si l'on veut observer un système de franges parallèles et non plus des anneaux.

36. Dans le vide et loin de toute source de charge ou de courant, les équations de Maxwell pour les champs électrique $\vec{E}(\vec{r},t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r},t)$ s'écrivent :

$$\text{div}\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \qquad \text{div}\vec{B}(\vec{r},t) = 0$$
$$\text{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad \text{rot}\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

On considère l'onde électromagnétique suivante $\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{u}_y$ solution de l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide,

$$\Delta\vec{E}(\vec{r},t) - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

A. Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r},t)$ correspond à celui d'une onde plane, progressive monochromatique.

B. Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r},t)$ est polarisé selon l'axe Ox.

C. D'après l'équation d'onde, la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est $c = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$.

D. Le champ magnétique associé à cette onde électromagnétique s'écrit $\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{\omega}\left[-\alpha\sin(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{u}_x + k\cos(\alpha z)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z\right]$.

E. La relation de dispersion $k(\omega)$ est $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$, c étant la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

37. On s'intéresse à la propagation de la lumière dans une fibre optique à saut d'indice. Comme représenté sur la Fig. 4, il s'agit d'un guide d'ondes optique cylindrique constitué de deux matériaux : le coeur d'indice de réfraction n_c et la gaine d'indice de réfraction n_g.

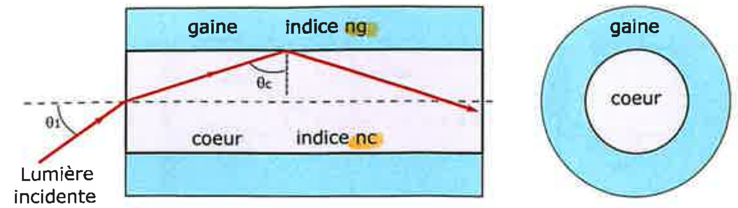


Fig. 4 : Fibre à saut d'indice.

A. Un signal optique sera guidé si l'indice de réfraction de la gaine est supérieur à celui du coeur.

B. A l'interface air / coeur nous avons la relation $\sin\theta_1 = n_c cos\theta_c$.

C. La vitesse de l'onde se propageant dans le coeur est $v = c \times n_c$ (c étant la célérité de la lumière dans le vide).

D. Le phénomène de réfraction totale interne à l'interface coeur / gaine permet de confiner la lumière dans le coeur de la fibre.

E. Un rayon d'angle d'incidence θ_1 pourra être injecté dans la fibre si $\sin\theta_1 \leq \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.

38. On s'intéresse aux propriétés de l'atome d'hydrogène d'un point de vue électrostatique. Le noyau sera une charge ponctuelle de valeur $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C et la charge de l'électron est répartie dans tout l'espace avec une densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0 e^{-2r/r_0}$ où ρ_0 et r_0 sont des constantes.

Il est possible de montrer, dans le cadre de ce modèle, qu'à une distance r du noyau, la charge $Q(r)$ de l'atome d'hydrogène est donnée par l'expression :

$$Q(r) = e + \pi r_0^3\rho_0 - \pi r_0^3\rho_0\left[1 + 2\frac{r}{r_0} + 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]e^{-2r/r_0}.$$

A. La constante r_0 du modèle est positive.

B. La constante ρ_0 est égale à $-\frac{e}{\pi r_0^3}$.

C. En coordonnées sphériques, le théorème de Gauss appliqué à une sphère de rayon R permettant d'obtenir l'expression du champ électrique s'écrit :

$$\oiint_{sphere} E(r)r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi = Q(R).$$

D. Si on considère que l'électron est assimilable à un point matériel de charge $-e$ en mouvement circulaire uniforme autour du noyau et ne subissant que la force électrique exercée par le noyau. Son énergie cinétique est égale à $E_c = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$, r_0 étant le rayon de la trajectoire de l'électron.

E. A la distance r_0, l'énergie potentielle d'interaction électrostatique de l'électron avec le noyau s'écrit $E_p = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}$.

39. On s'intéresse aux deux circuits électriques de la Fig. 5 :

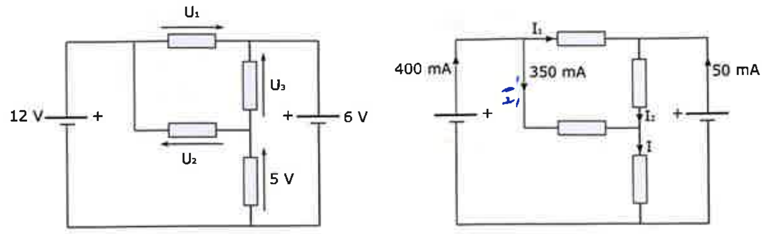


Fig. 5 : Circuits électriques.

A. Nous avons $U_1 = 6\ V$, $U_2 = -17\ V$ et $U_3 = -11\ V$.

√ B. Nous avons $U_1 = -6\ V$, $U_2 = 7\ V$ et $U_3 = 1\ V$.

~ C. Nous avons $I = 450\ mA$.

D. Nous avons $I = 50\ mA$.

E. Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

40. On considère le filtre RL de la Fig. 6, avec $R = 1\ k\Omega$ et $L = 10$ mH.

RC : passe bas

RL :

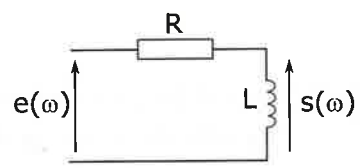


Fig. 6 : Filtre RL

Q =

~~A.~~ L'impédance complexe de la bobine est $Z_L = \frac{1}{jL\omega}$.

B. La fonction de transfert $H(\omega) = \frac{s(\omega)}{e(\omega)}$ peut s'écrire sous la forme $H(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ où ω_c est la pulsation de coupure du filtre.

C. Il s'agit d'un filtre passe-bas.

D. La pulsation de coupure du filtre est donnée par l'expression $\omega_c = \frac{R}{L}$.

~ E. Un signal de fréquence $f = 100$ KHz sera transmis par ce filtre.

FIN de l'EPREUVE de PHYSIQUE

$I_D = I_1 + I_1'$

$400 = I_1 + 350$

$I_1 =$

$u_1 = U_3 + 5V$

12 V

6

$u_1 = +6\ V$

$U_3 = u_1 + U_2$

$1 = 6 +$

$u_1 = -6\ V$

$u_2 = 7\ V$

$u_3 = 1\ V$

$u_3 = u_1 + u_2$

$u_2 = u_3 - U_1$