CASTING

Juin 2012

Epreuve écrite de mathématiques

Barême indicatif :
- **Exercice 1 : 7,5 pts**
- **Exercice 2 : 9 pts**
- **Exercice 3 : 3,5 pts**

Exercice 1
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\ 2t\,x'(t) + x(t) = 3t\cos(t^{\frac{3}{2}}),\ t \geq 0$$

1. *Trouver une série entière* $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ *telle que sa restriction à* $\mathbb{R}_+$ *soit solution de* (E) *(on précisera son rayon de convergence).*

2. *Déterminer toutes les solutions de l'équation* (E) *sur* $]0,+\infty[$.

3. *Déterminer les solutions de* (E) *prolongeables par continuité en* 0 *(on en trouvera une seule).*

4. *En déduire la série entière telle que pour* $t > 0$ *la somme de cette série coïncide avec la fonction* $\frac{\sin(t\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$.

Exercice 2
Soit n *un entier naturel avec* $n \geq 3$. *On considère la matrice* n *lignes et* n *colonnes* A *définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A *a tous ses coefficients nuls sauf ceux placés sur la première ligne, la première colonne et ceux sur la dernière ligne et la dernière colonne qui valent 1.*

1. *A est-elle diagonalisable ?*

2. *Quel est le rang de A ?*

3. *En déduire que 0 est valeur propre de M. Quel est son ordre de multiplicité (justifier) ?*

4. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A.*

   (a) *Donner une base de l'image de f notée $\mathrm{Im}(f)$.*

   (b) *Soit g la restrition de f à $\mathrm{Im}(f)$, c'est à dire l'endomorphisme g défini de la manière suivante*

   $$g: \begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

   Écrire la matrice B de g relativement à la base de $\mathrm{Im}(f)$ trouvée précédemment et vérifier que g est un endomorphisme bijectif.

   (c) *Trouver les valeurs propres de g.*

5. *En déduire toutes les valeurs propres de A.*

Exercice 3
Soit $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la fonction vectorielle définie en tout $(x, y, z) \neq (0,0,0)$ par :

$$V(x,y,z) = \left(\frac{-xz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{-yz}{x^2+y^2+z^2}, t(x,y,z) \right)$$

où $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui admet des dérivées partielles.

Pour $V(x,y,z) = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$, on pose :

$$\mathrm{div}V = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Déterminer la fonction t, telle que :

$$\begin{cases} \mathrm{div}V = 0 \\ t(x,y,0) = \ln(x^2+y^2) \end{cases}$$