



QCM

TEST

Test
Examen du 0/0/2018

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.
Les questions sont par défaut posées au pluriel mais il peut y avoir 0, 1 ou plusieurs réponses.

1 Complexes

Question 1 ♣ La valeur de $\left(\frac{2 - i\sqrt{12}}{3 - 3i}\right)^4$ est

- A $\frac{32}{81}(1 + i\sqrt{3})$
- B i
- C $\frac{32}{81}(1 - i\sqrt{3})$
- D $\frac{32}{81}(-1 - i\sqrt{3})$
- E $\frac{32}{81}(-1 + i\sqrt{3})$

Question 2 ♣ Le module et un argument du nombre complexe $(1 - i)^2 e^{i\frac{\pi}{3}} (1 + i\sqrt{3})$ sont

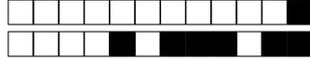
- A $\sqrt{2}, 0$
- B $4, -\pi/6$
- C $2, \pi/12$
- D $1, -\pi/3$
- E $4, \pi/6$

Question 3 ♣ On considère les propositions suivantes, où $z \neq 0$

1. $Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{|z|^2} Re(z)$.
2. $|z - 1| < 1 \implies Re\left(\frac{1}{z}\right) > \frac{1}{2}$.
3. $|z| < 1 \implies Re\left(\frac{1}{z}\right) > 1$.

Quelles sont celles qui sont valables pour tout $z \neq 0$

- A 3 seulement
- B 1,2 et 3
- C 1 et 2 seulement
- D 2 et 3 seulement
- E 1 seulement



2 Intégration

Question 4 ♣ Soient a et b deux nombres réels avec $a > 1$ et $b > 1$. La valeur de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx \text{ est}$$

- A on ne peut pas calculer explicitement cette intégrale
- B $\frac{\ln(b)}{\ln(a)} - \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$
- C $\ln(b) - \ln(a)$
- D $\frac{1}{\ln(a)} - \frac{1}{\ln(b)}$
- E $\frac{b}{\ln(b)} - \frac{a}{\ln(a)}$

Question 5 ♣ Soient $F(x) = \int_0^{x^3} \sin(e^t) dt$ pour tout $x > 0$. $F'(x) =$

- A $e^x \sin(e^{x^3})$
- B $\sin(e^{x^3})$
- C $\sin(3x^2 e^{x^3})$
- D $3x^2 \sin(e^{x^3})$
- E $3x^2 e^x \sin(e^{x^3})$

Question 6 ♣ L'intégrale $\int_1^{e^2} \ln(\sqrt{x}) dx$ est égale à

- A $e^2 + 1$
- B $\frac{e^2 - 1}{2}$
- C $e^2 - 1$
- D l'intégrale n'est pas évaluable de manière exacte.
- E $\frac{e^2 + 1}{2}$

Question 7 ♣ La valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est

- A 0
- B 2
- C 1/2
- D $+\infty$
- E 1



Question 8 ♣ Soient $a < b$. Soit (C) la courbe plane d'équation $y = f(x)$ où $f(x) = (a - x)(x - b)$. Soient p, q tels que $a \leq p < q \leq b$, et P et Q les points sur (C) de coordonnées $P = (p, f(p))$, $Q = (q, f(q))$. L'aire de la région délimitée par la courbe (C) et la corde (PQ) est

- A $\frac{1}{6}(q - p)^3$
- B $\frac{1}{4}(q - p)^2$
- C $\frac{1}{3}(q - p)^3$
- D $\frac{1}{2}(q - p)^2$
- E $\frac{1}{6}(q - p)^2$

Question 9 ♣ La quantité $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1 - t} dt$

- A est égale à 1
- B est égale à $\ln(2)$
- C n'existe pas
- D est égale à 0
- E est égale à $+\infty$

Question 10 ♣ Soit $n \geq 0$, un entier, $a > 0$ et $\varepsilon > 0$ un réel. On considère l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\ln(t)}{\sqrt{1 + t^a}} dt$. Quand ε tend vers 0,

- A cette intégrale converge pour $a > 2$
- B cette intégrale converge pour tout a .
- C cette intégrale converge pour $a > 1$
- D cette intégrale converge pour $a > \frac{1}{2}$
- E cette intégrale ne converge pour aucun a



3 Algèbre linéaire

Question 11 ♣ La matrice complexe $\begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ l & 1 & l \\ 0 & l & 1 \end{pmatrix}$ a pour rang 2 quand

- A $l \neq i$
- B $l \in \{-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\}$
- C $l \in \{-i, i\}$
- D $l = i$
- E $l \notin \{0, 1\}$

Question 12 ♣ L'ensemble des nombres réels a pour lesquels le système linéaire

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

n'a pas de solutions est

- A l'ensemble vide
- B $\{-2, 1\}$
- C $\{-2, 1, 3\}$
- D $\{1\}$
- E $\{-2\}$

Question 13 ♣ Soit $n \geq 2$, pour tout couple de matrices (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$, on a

- A $\det(A) \neq 0$
- B Tout vecteur propre pour A est vecteur propre pour B .
- C $\det(BA) \neq 0$
- D $(BA)^2 \neq 0$
- E $\det(A) = 0$

Question 14 ♣ Soient un réel a , et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est diagonalisable dans le corps \mathbb{R} :

- A pour tout a
- B jamais
- C si $a = 0$
- D si $a \neq 1$
- E si $a \in \{0, 1\}$



Question 15 ♣ L'ensemble des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est

- A $\{0, 1, 4\}$
- B $\{0, 2, 4\}$
- C $\{0, 4\}$
- D $\{4\}$
- E $\{2, 4\}$

Question 16 ♣ Toutes les matrices de cette question sont des matrices réelles 2×2 . Soit $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq \beta$. L'ensemble des matrices M telles que $M\Delta = \Delta M$ est

- A $\{I_2\}$
- B $\{\lambda I_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$
- C L'ensemble des matrices triangulaires
- D L'ensemble des matrices diagonales
- E L'ensemble de toutes les matrices

Question 17 ♣ Dans \mathbb{R}^4 , on considère les quatre vecteurs $x = (1, 1, 1, 1)$, $y = (1, 1, 1, 0)$, $z = (1, 1, 0, 0)$, $t = (0, 0, 1, 0)$. On note F le sev de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs x, y et G le sev de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs t, z . Les dimensions de $F, G, F \cap G, F + G$ sont données dans cet ordre par

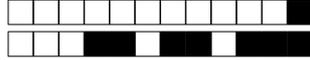
- A 2, 2, 1, 3
- B 1, 2, 1, 2
- C 2, 1, 0, 3
- D 2, 2, 0, 4
- E 2, 2, 0, 2

Question 18 ♣ Soit M une matrice carrée et soit u un vecteur propre de M associé à la valeur propre 3. On note E_λ l'espace propre associé à la valeur propre λ . On considère les 3 propositions :

1. $3u$ est dans E_9 .
2. u est un vecteur propre de $3M$ associé à la valeur propre 9.
3. $-u$ est dans E_3 .

Quelles propositions sont exactes

- A 2 et 3 seulement
- B 1 et 3 seulement
- C 1, 2 et 3
- D 2 seulement
- E 1 seulement



Question 19 ♣ Soient λ, μ des réels et $P \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \mu & \mu^2 \end{pmatrix}$. Alors P est inversible.

- A pour toutes les valeurs de λ, μ .
- B si et seulement si $\lambda \neq \mu$ et $\lambda \neq 1$ et $\mu \neq 1$.
- C si et seulement si $\lambda \neq \mu$ et $\lambda \notin \{1, 2\}$ et $\mu \notin \{1, 2\}$.
- D jamais
- E si et seulement si $\lambda \neq \mu$ et $\lambda \notin \{0, 1\}$ et $\mu \notin \{0, 1\}$.

Question 20 ♣ Soient A une matrice carrée $n \times n$ ($n \geq 2$) et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres (réelles ou complexes) de A . Quelle est parmi les propositions suivantes celles qui est fausse?

- A A est inversible si et seulement si les λ_i sont toutes non nulles.
- B $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$ où \prod désigne le produit.
- C la trace de A est égale à la somme des λ_i
- D si A est diagonalisable dans \mathbb{R} , les λ_i sont toutes réelles et 2 à 2 distinctes.
- E si A est nilpotente alors tous les λ_i sont nulles.



4 Limites, DL

Question 21 ♣ La limite quand x tend vers 0 de $\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x^2)}$ est

- A 1
- B 0
- C $+\infty$
- D -1
- E $1/2$

Question 22 ♣ La limite quand x tend vers 0 de $\frac{1}{x^2} - \frac{\tan(x)}{x^3}$ est

- A $-1/6$
- B $1/6$
- C $1/3$
- D 0
- E $-1/3$

Question 23 ♣ Soit $1 + ax + bx^2 + o(x^2)$ un DL de $\sqrt{1 + x + x^2}$ au voisinage de 0. Le couple (a, b) est égal à

- A $(1/2, 1/8)$
- B $(1/2, 5/8)$
- C $(1, -3/8)$
- D $(1, 3/4)$
- E $(1/2, 3/8)$

Question 24 ♣ Le DL à l'ordre 5 en 0 de $\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

- A $x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} + o(x^5)$
- B $\frac{1}{x^2} + 1 + x^2 + x^4 + o(x^5)$
- C $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)$.
- D $x^4 + o(x^5)$.
- E $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^5)$



5 Equations différentielles

Question 25 ♣ Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant l'équation différentielle

$$xf''(x) - f'(x)^2 + 12 = 0,$$

avec $f(1) = -1, f'(1) = 0$. Le couple de valeurs $(f''(1), f'''(1))$ est donné par

- A (1, -1)
- B (2, -2)
- C (12, -12)
- D (-4, 4)
- E (-12, 12)

Question 26 ♣ Soit $y(x)$ une solution de l'équation différentielle sur \mathbb{R}

$$x \frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

telle que $y(1) = 2$. On a $\frac{dy}{dx}(0) =$

- A -1
- B 4.
- C -1/2
- D 2/3
- E 0

Question 27 ♣ Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue. La fonction $x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \int_0^x \sin(u)g(x-u)du$ est une solution de l'équation différentielle sur \mathbb{R}_+

- A $y'' + y = g(x)$
- B $y' - g(0) \sin(x) = 0$
- C $\cos(x)y' + \sin(x)y = \sin(x)g(x) - g(0)$
- D $\sin(x)y' + \cos(x)y = -\sin(x)g(x)$
- E $y'' + y' - g(0) \sin(x) = 0$

Question 28 ♣ Soit F l'ev réel constitué des fonctions continues, qui sont solutions sur \mathbb{R}^* de l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$. La dimension $\dim(F)$ vaut

- A 2
- B 4
- C 3
- D 0
- E 1



6 Suites et séries

Question 29 ♣ On considère la suite $u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots 2n}$. Cette suite

- A $+\infty$
- B converge vers 2
- C converge vers $2/e$
- D converge vers $3/e$
- E converge vers $4/e$

Question 30 ♣ On a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{4^n} =$ (indication : on pourra calculer $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$)

- A $\frac{1}{3}$
- B $+\infty$
- C $-4/5$
- D $-\frac{2}{3}$
- E $\frac{3}{4}$

Question 31 ♣ La somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{3^n}$ est égale à

- A $\frac{\sin(2\theta)}{10 - 6 \cos(\theta)}$
- B $\frac{9 - 3 \sin(\theta)}{10 - 6 \cos(\theta)}$
- C $\frac{9 - 3 \cos(\theta)}{10 - 6 \cos(\theta)}$
- D $\frac{\cos(2\theta)}{10 - 6 \cos(\theta)}$
- E 0 pour tout θ



- 0 0
- 1 1
- 2 2
- 3 3
- 4 4
- 5 5
- 6 6
- 7 7
- 8 8
- 9 9

← codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

- QUESTION 1 : A B C D E
- QUESTION 2 : A B C D E
- QUESTION 3 : A B C D E
- QUESTION 4 : A B C D E
- QUESTION 5 : A B C D E
- QUESTION 6 : A B C D E
- QUESTION 7 : A B C D E
- QUESTION 8 : A B C D E
- QUESTION 9 : A B C D E
- QUESTION 10 : A B C D E
- QUESTION 11 : A B C D E
- QUESTION 12 : A B C D E
- QUESTION 13 : A B C D E
- QUESTION 14 : A B C D E
- QUESTION 15 : A B C D E
- QUESTION 16 : A B C D E
- QUESTION 17 : A B C D E
- QUESTION 18 : A B C D E
- QUESTION 19 : A B C D E
- QUESTION 20 : A B C D E
- QUESTION 21 : A B C D E



QUESTION 22 : A B C D E

QUESTION 23 : A B C D E

QUESTION 24 : A B C D E

QUESTION 25 : A B C D E

QUESTION 26 : A B C D E

QUESTION 27 : A B C D E

QUESTION 28 : A B C D E

QUESTION 29 : A B C D E

QUESTION 30 : A B C D E

QUESTION 31 : A B C D E

PROJET