A2021 – MATHS-PHY

GEI-UNIV

**ECOLE DES PONTS PARISTECH, ISAE-SUPAERO,
ENSTA PARIS, TELECOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ETIENNE, MINES NANCY, IMT ATLANTIQUE,
ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH – PSL.
ECOLE POLYTECHNIQUE, ARTS et METIERS,
ESPCI PARIS, SUPOPTIQUE, ENAC.**

Admission par voie universitaire

EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES et PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures.

L'emploi de tous documents (dictionnaires, imprimés, ...) et de tous appareils (traductrices, calculatrices électroniques, ...) est interdit dans cette épreuve.

Cette épreuve est un questionnaire à choix multiples.

Les questions sont numérotées de 1 à 20 pour l'épreuve de mathématiques.

et de 21 à 40 pour l'épreuve de physique.

Chaque question peut admettre, de façon variable, entre une et cinq réponses correctes.

Dans toutes les questions vous indiquerez les assertions correctes.
Exprimer les réponses exactes en noircissant la ou les cases correspondantes.

Toute réponse incorrecte sera pénalisée.

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Respectez scrupuleusement les consignes de remplissage des cases du document réponse.

QCM - Mathématiques

Questions 1 à 20

1. Soit $S = \sum_{k=1}^{11} (-2)^k$.

   A. $S = -1366$.
   B. $S = -\dfrac{2047}{3}$.
   C. $S = 683$.
   D. $S = \dfrac{4094}{3}$.
   E. $S = 2047$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x\ln(x)$.

   A. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
   B. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.
   C. f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   D. f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$.
   E. f est concave.

3. Soit $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t$.

   A. $I = -\dfrac{2}{3}$.
   B. $I = \dfrac{2}{3}$.
   C. $I = \dfrac{\pi}{4}$.
   D. $I = 1$.
   E. $I = \dfrac{\pi}{2}$.

4. On répond à une question de ce Q.C.M. en choisissant 1 à 5 assertions parmi les 5 proposées (numérotées de A à E).
Combien y a-t-il de façons de répondre à une question de ce Q.C.M. ?

   A. 1.

   B. 5.

   C. 25.

   D. 31.

   E. 32.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

   A. A est inversible.

   B. Le rang de A est 3.

   C. Le rang de A est 1.

   D. A est diagonalisable.

   E. -3 est valeur propre de A.

6. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   A. B n'est pas inversible.

   B. B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   C. B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   D. B est diagonalisable.

   E. B est inversible et $B^{-1} = -\frac{1}{2}B^2 + B + \frac{1}{2}I_3$ où $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   A. Le déterminant de C est nul.
   B. Le déterminant de C est égal à -2.
   C. Le déterminant de C est égal à 2.
   D. Le déterminant de C est égal à 1.
   E. Le déterminant de C n'est pas défini.

8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
   On note f' la fonction dérivée de f. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   A. $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.
   B. $f'(x) = 2\sqrt{1+x^2}$.
   C. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   D. $f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.
   E. $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$

9. Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   A. Il y a 243 applications de E dans F.
   B. Il y a 125 applications de E dans F.
   C. Il n'y a pas d'applications injectives de E dans F.
   D. Il y a 60 applications injectives de E dans F.
   E. Il y a 243 applications surjectives de E dans F.

10. Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ u(x, y, z) = \big(x + y - z, 2x - z\big).$$

   A. Le rang de u est égal à 3.
   B. Le rang de u est égal à 2.
   C. Le noyau de u est $\{(0, 0, 0)\}$.
   D. Le noyau de u est la droite engendrée par $(1, 1, 2)$.
   E. u est un isomorphisme.

11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f \circ f = O$ mais $f \circ f \neq O$, où O désigne l'endomorphisme nul de E.
On note $\mathrm{Ker}(f)$ le noyau de f et $\mathrm{Im}(f)$ son image.

    A. $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
    B. $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
    C. $\mathrm{Im}(f \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
    D. E est de dimension supérieure ou égale à 3.
    E. Un tel endomorphisme f n'existe pas.

12. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.
On rappelle que ce dernier, noté ici $\big(\cdot \mid \cdot\big)$, est défini par :

$$\forall\, x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \big(x|y\big) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

On considère aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$H = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x + y + z = 0\Big\}$$

On considère enfin le point M de coordonnées $(1, 1, 1)$ et on note d la distance euclidienne de M à H.

    A. $d = 0$.
    B. $d = \sqrt{3}$.
    C. $d = 3$.
    D. $\Big(\big(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\big), \big(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\big)\Big)$ est une base orthonormale de H.
    E. $\Big(\big(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\big), \big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\big)\Big)$ est une base orthonormale de H.

13. On considère les deux intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$$

    A. L'intégrale I converge.
    B. L'intégrale I diverge.
    C. L'intégrale J converge.
    D. L'intégrale J diverge.
    E. $I + J = 0$.

14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On note $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

A. Si u_n tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.
B. Si nu_n tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.
C. Si n^2u_n tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.
D. Si nu_n tend vers $+\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.
E. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites équivalentes, alors $\sum u_n$ converge.

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation différentielle (de fonction inconnue y) :

$$(E_n) \qquad y(x) + ny'(x) = x^2.$$

On note s_n une solution de (E_n).

A. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ s_n(x) = \lambda e^{-x/n}$
B. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ s_n(x) = \lambda e^{x/n}$
C. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ s_n(x) = x^2 + \lambda e^{-x/n}$
D. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ s_n(x) = x^2 - 2nx + 2n^2 + \lambda e^{-x/n}$
E. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions qui converge simplement sur $\mathbb{R}$.

16. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $[0,1]$ par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n.$$

A. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
B. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1[$.
C. $f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
D. La limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est continue sur $[0,1]$.
E. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

17. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}$ par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx\sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

On donne l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

A. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
B. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.
C. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas sur $\mathbb{R}$.
D. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[-A, A]$, où $A \in \mathbb{R}_+^*$.
E. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

18. On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \ln(n) z^n$. On note R son rayon de convergence.

A. $R = 0$.
B. $R = 1$.
C. $R = +\infty$.
D. Cette série entière converge uniformément sur l'intervalle $]-R, R[$.
E. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. alors $\sum_{n\geq 1} \ln(n) z^n$ converge absolument.

19. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

A. f n'a pas de point critique.
B. $(0, 0)$ est le seul point critique de f.
C. f admet un minimum global en $(0, 0)$.
D. f admet un maximum local en $(0, 0)$.
E. f n'atteint ni un minimum local, ni un maximum local en $(0, 0)$.

20. On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(x+y)^n}{n}$, où x et y sont des réels.

On note D l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que cette série converge.

Enfin on note f la fonction de deux variables qui à tout couple $(x, y) \in D$ associe $f(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n}$.

A. D est un ensemble borné.

B. D est un ensemble fermé.

C. D est un ensemble ouvert.

D. f n'a pas de point critique.

E. f atteint un minimum en $(0, 0)$.

FIN de l'EPREUVE de MATHEMATIQUES