# TD : Intégration

## 1 Changement de variable des intégrales simples

**Exemple 1: Changement de variable des intégrales de fonctions d'une variable.**

Calculons $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ pour $a > -1$ et $b \geqslant a$ par le changement de variable $u = \sqrt{x+1}$.

Pour changer de variable, il faut changer les trois éléments reliés à la variable d'intégration :

• **Changer l'ancienne variable par son expression en fonction de la nouvelle :**

Comme $u = \sqrt{x+1}$ alors $u^2 = x+1$ et donc $x = u^2 - 1$. Ceci nous permettra de remplacer le numérateur de la fraction. Par ailleurs, le dénominateur vaut $u$.

• **Changer l'infiniment petit :**
La nouvelle variable $u$ s'exprimant en $x$, on peut calculer sa dérivée en $x$ : $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Un calcul peu rigoureux mathématiquement nous donne alors $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{dx}{2u}$.

• **Changer les bornes** : Lorsque $x$ vaut $a$, $u$ vaut $\sqrt{a+1}$, lorsque $x$ vaut $b$, $u$ vaut $\sqrt{b+1}$.

• **Tout remplacer simultanément dans l'intégrale :**

$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{b+1}} \frac{(u^2-1)2udu}{u} = \int_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{b+1}} (u^2-1)2du = 2\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{b+1}}.$$

$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\frac{\sqrt{b+1}^3 - \sqrt{a+1}^3}{3} - 2\sqrt{b+1} + 2\sqrt{a+1}.$$

▸ **Exercice 1**. **Savoir effectuer un changement de variable sur une intégrale réelle**

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$ (poser $u = e^{-x}$)
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(x)dx$ (poser $u = \cos(x)$)
3. $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2+x}dx$ (poser $u = \sqrt{2+x}$)
4. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ (poser $u = \cos(x)$)

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

1. $\ln(2) - \ln(1+e^{-1})$
2. $\ln(2)/2$
3. $\dfrac{64-8\sqrt{2}}{5} + \dfrac{8\sqrt{2}-32}{3}$
4. $\pi/4$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂

## 2 Calculer une intégrales multiple

Comme on intégrait les fonctions à une variable réelle, on peut intégrer des fonctions à plusieurs variables par rapport à ces variables. Par exemple, on peut intégrer $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ par rapport à $x$ et $y$ sur un domaine $D$ bidimensionnel. Géométriquement, cela revient à calculer le volume algébrique sous la surface formée par cette fonction (voir dessin ci contre). Nous n'entrons pas ici dans le détail de la construction théorique de l'intégrale double. Nous nous focalisons sur son calcul en se ramenant à des intégrales simples (à une variable d'intégration).

**Remarque 1: A quoi servent les intégrales multiples**

• **Calculer la masse d'une plaque :** Si on connaît la densité surfacique et la surface d'une plaque uniforme $P$, on peut calculer sa masse en multipliant ces deux données. Si en revanche, la densité surfacique n'est pas uniforme, à chaque élément de surface $dxdy$ est associée une densité surfacique $\rho(x, y)$. La masse de cet élément de surface est alors $\rho(x, y)dxdy$. Sommer ces masses donne alors la masse de la plaque. Sommer ici signifie intégrer suivant $x$ et $y$. La masse est donnée par

$$\iint_P \rho(x, y)dxdy$$

• **Calculer de force résultante d'une charge :** Applique une charge uniforme à une plaque $P$ (comme celle de l'eau stagnante sur le fond d'un réservoir d'eau), la force résultante est le produit de la densité de charge par l'aire de la plaque. Si la densité de charge $\rho(x, y)$ n'est plus uniforme (si l'eau est en mouvement par exemple), la force est de manière analogue à ci-dessus donnée par

$$\iint_P \rho(x, y)dxdy$$

• **Calcul du moment d'inertie :** Le moment d'inertie mesure la répartition de la masse d'un solide par rapport à un axe choisi. Il quantifie aussi la résistance à une mise en rotation : plus la masse est éloignée de l'axe de rotation plus la mise en rotation sera difficile. Le moment d'inertie d'une particule de masse $m$ situé à une distance $R$ de l'axe de rotation est $mR^2$. Pour calculer le moment d'inertie d'une plaque par rapport à l'axe vertical, on calcule alors pour $\rho$ la densité de surface

$$\iint_P (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy$$

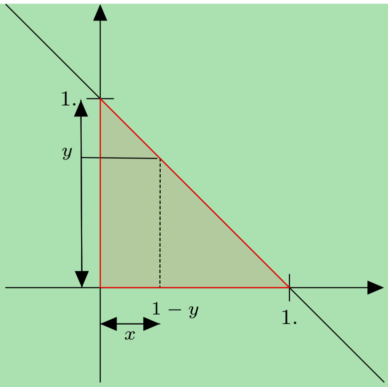
• **A calculer des volumes :** Vous allez retrouver dans la suite les formules des volumes de la sphère, cylindre etc.

**Exemple 2:**

De la même manière que nous pouvons calculer une intégrale d'une fonction d'une variable réelle, il est possible de définir de calculer des intégrales de fonctions à plusieurs variables dites multiples. L'idée consiste alors à se ramener aux fonctions d'une variable réelle. Voyons comment s'y prendre sur l'exemple suivant : on souhaite calculer l'intégrale

$$\iint_D x dxdy, \quad \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 | x + y \leq 1\}.$$

• Il faut d'abord visualiser le domaine, le dessiner afin de déterminer les bornes en chaque variable.
• On intègre ensuite variable par variable : par exemple si on commence à intégrer en $x$.




Le domaine $D$ est dessiné en rouge. Choisissons de fixer $y$ : $y$ peut être choisi entre 0 et 1. Comme l'illustre le dessin, une fois que $y$ est fixé, $x$ est conditionné par la valeur $y$ : il ne peut excéder $1-y$ sinon on sort du domaine, ainsi $x$ est compris entre 0 et $1-y$. Ainsi si on commence par intégrer en $x$, on obtient :

$$\iint_D xdxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} xdxdy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-y} xdx \right) dy = \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2} dy = -\frac{1}{2} \left[ \frac{(1-y)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

• On pourrait commencer par intégrer en $y$ également. A $x$ fixé entre 0 et 1, $y$ peut alors aller de 0 à $1-x$.

$$\iint_D xdxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} xdydx = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} dy \right) xdx = \int_0^1 (1-x)xdx = \int_0^1 (x-x^2)dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

▸ **Exercice 2. Savoir calculer une intégrale multiple par primitive**

Calculer les intégrales doubles suivantes après avoi bien dessiné le domaine $D$ d'intégration :

1. $\iint_D dxdy$ où $D = [0, \pi]^2$.
2. $\iint_D dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 | y \leq x^2 \leq 1\}$.
3. $\iint_D xydxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 | x + y \leq 1\}$.
4. $\iint_D x^2dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leqslant 1, 0 \leqslant y, y^2 \leq x\}$.
5. $\iint_D \sin(x + y)dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 | x + y \leq \pi\}$.
6. $\iint_D e^{-2x-3y}dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 | x + y \leq 1\}$.
7. $\iint_D xy + 1dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 | x + y - 1 \leq 0\}$.
8. $\iint_D \frac{dxdy}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.
9. $\iiint_D (x + y + z)^2dxdydz$ où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 | x + y + z \leq 1\}$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

1. $\pi^2$
2. $2/3$
3. $1/24$
4. $2/7$
5. $\pi$
6. $\frac{1}{3}(1 - e^{-1} - e^{-3})$
7. $13/24$
8. $\pi^2/32$
9. $1/10$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - ✂

## 3 Calculer une intégrale multiple via un changement de variable

**Théorème 1: changement de variable**

Soit $\omega$ et $\Omega$ deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$, $n \geqslant 1$, et $\varphi$ de classe $C^1(\omega)$ telle que $\varphi(\omega) = \Omega$. Soit $f$ fonction continue et intégrable sur $\Omega$. Supposons que pour tout $(u,v) \in \omega$, la matrice jacobienne $J_\varphi(u,v)$ soit inversible, alors

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_\omega f(u,v)|\det(J_\varphi(u,v))|dudv$$

Noter que la formule du changement de variable est également vraie dans $\mathbb{R}^3$ et même plus généralement dans $\mathbb{R}^n$.

**Exemple 3: Changement de variable polaire**

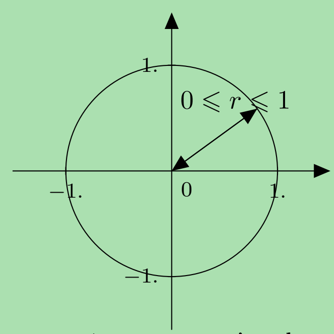
Il est un changement de variable particulièrement adapté à des cas isotropes (lorsque un donnée est invariant par rotation) : le changement de variable polaire

$$\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Reprenons l'exemple du calcul de la masse d'une plaque circulaire de rayon 1 dont la densité surfacique est donnée par $1 - \sqrt{x^2+y^2}$ : plus on s'éloigne de l'axe plus la masse diminue. La masse est donnée par $\displaystyle\iint_D 1 - \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

**Résolution mathématique :**

• **Changer le domaine (bornes) :** A nouveau, la clé est de bien déterminer le domaine d'intégration afin de faire le bon changement de bornes dans le changement de variable. Dessinons ce domaine :
Le rayon $r$ est donc compris entre 0 et 1 et pour décrire tout le disque $\theta$ doit aller de 0 à $2\pi$. Donc $D = \{(r,\theta) \in [0,1] \times [0, 2\pi[\}$




• **Calculer le déterminant du jacobien :** Je vous laisse vous remémorer ce qu'est la matrice jacobienne et en calculer le déterminant qui vaut $r$.

• **Calculer !**

$$\iint_D 1 - \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_D (1-r)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (r-r^2)dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3})\right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{3}$$

▸ **Exercice 3. Savoir calculer une intégrale double à l'aide du changement de variable polaire**
Calculer les intégrales doubles suivantes après avoi bien dessiné le domaine $D$ d'intégration à l'aide du changement de variable polaire :

1. $\displaystyle\iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq \pi\}$
2. $\displaystyle\iint_D 1 + xydxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1\}$
3. $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq R^2\}$.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

1. $2\pi$
2. $\pi$

3. $\pi(1-e^{-r^2})$

---

▸ **Exercice 4. Retournons au collège : calcul de volumes**

1. **Aire du cercle :** Calculer $\iint_D dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq R^2\}$ à l'aide du changement de variable polaire.
2. **Volume du cylindre :** Calculer $\iiint_{\mathcal{C}} dxdy$ où $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$ à l'aide du changement de variable polaire.
3. **Volume du sphère :** Calculer $\iiint_{\mathcal{S}} dxdydz$ où $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ à l'aide du changement de variable sphérique : $\Phi : (r,\theta,\varphi) \mapsto (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta))$.

▸ **Exercice 5. L'intégrale de Gauss** On note $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 | x^2+y^2 \leq R^2\}$.

1. Calculer la valeur de $\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$.
2. Expliquer pourquoi $\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \iint_{[0,R]^2} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \iint_{D_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dxdy$. (Faites déjà un beau dessin pour le visualiser)
3. Démontrez que $\left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2 = \iint_{[0,R]^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$.
4. En utilisant l'encadrement de la question 2, déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

---

1. $\pi(1-e^{-r^2})/4$
2. 
3. 
4. $\sqrt{\pi}/2$

---