Université d'Orsay - Paris-Saclay **M2 MEEF 1er degré**
2ème semestre 2024-2025 **Mathématiques**

Cours : séance 5 (lundi 10 février)

Cinquième partie 5. **Statistiques et probabilités.**

Exercice 5.6 – Calcul de probabilités.

1. L'univers Ω est ici l'ensemble des 52 cartes. Il y a 13 cartes de chaque "couleurs" (pique, coeur, carreau, trèfle). Les cartes sont équiprobables.

"Obtenir un carreau" est donc réalisé par 13 issues, la probabilité est $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ (on a bien une chance sur 4 de tirer un carreau.

"Obtenir un valet" est réalisé par 4 issues, la probabilité est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

"Obtenir un valet ou un carreau" est réalisé par les 13 cartes de carreau (y compris le valet de carreau), ainsi que par les 3 valets d'une autre couleur. La probabilité est $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

2. L'univers change ! On a rajouté deux cartes. Donc Ω est ici l'ensemble des 52 cartes, plus les 2 jokers. Les cartes sont équiprobables.

Le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles changent !

Maintenant $p(\text{Obtenir un carreau}) = \frac{13+2}{54} = \frac{15}{54} = \frac{5}{18}$, et $\frac{5}{18} > \frac{1}{4}$. La probabilité du 1er événement change.

$p(\text{Obtenir un valet}) = \frac{4+2}{54} = \frac{6}{54} = \frac{1}{9}$, et $\frac{1}{9} > \frac{1}{13}$.

Enfin $p(\text{Obtenir un valet ou un carreau}) = \frac{16+2}{54} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$, et $\frac{1}{3} > \frac{4}{13}$.

Remarque : On part de deux nombres p, q tels que $0 < p < q$. Puis on considère la fraction $x = \frac{p}{q} \in [0; 1]$. On ajoute un même nombre $k > 0$ au numérateur et au numérateur pour obtenir une nouvelle fraction $x' = \frac{p+k}{q+k}$. Alors $0 < x < 1$ et $\boxed{x' > x}$! Car $x' - x = \frac{p+k}{q+k} - \frac{p}{q} = \frac{q(p+k) - p(q+k)}{q(q+k)} = \frac{(q-p)k}{q(q+k)} > 0$.

Exercice 5.12 – Calcul de probabilités : tirage avec remise.

Attention au vocabulaire ! Le mot résultat dans l'énoncé est à comprendre comme : "résultat de l'opération de produit". Ce n'est pas le résultat de l'expérience aléatoire, qui est ici ce qu'on appelle un <u>tirage avec remise</u>.

Décrivons l'univers. Chacun des deux tirages donne une issue partielle. L'issue de l'expérience est constitué des deux issues indiquées dans l'ordre d'apparition : on peut noter (x, y). C'est pourquoi l'issue $(2, 3)$ est différente de $(3, 2)$.

A partir d'une issue (x, y) on fabrique un nombre : le produit xy, et on étudie les résultats du tirage avec remise par le prisme de ce produit. On a une fonction sur l'univers des possibles. Quand on impose certaines conditions sur les valeurs de cette fonction cela définit un événement particulier, dont on peut alors calculer la probabilité.

Noter la ressemblance avec les mesures numériques sur une population. La population qu'on étudie par différentes mesures est modélisée par l'univers. Les sous-classes de la population pour lesquelles la mesure est dans un certain intervalle (ou vérifie certaines propriétés) correspondent aux événements. Un type d'événement classique est "Le résultat de la mesure vaut tant".

a)

Deuxième tirage / Premier tirage	1	2	3	4
1	$(1,1) \to \boxed{1}$	$(1,2) \to \boxed{2}$	$(1,3) \to \boxed{3}$	$(1,4) \to \boxed{4}$
2	$(2,1) \to \boxed{2}$	$(2,2) \to \boxed{4}$	$(2,3) \to \boxed{6}$	$(2,4) \to \boxed{8}$
3	$(3,1) \to \boxed{3}$	$(3,2) \to \boxed{6}$	$(3,3) \to \boxed{9}$	$(3,4) \to \boxed{12}$
4	$(4,1) \to \boxed{4}$	$(4,2) \to \boxed{8}$	$(4,3) \to \boxed{12}$	$(4,4) \to \boxed{16}$

Il y a 16 cases (4×4), donc puisque tous les résultats ont la même probabilité de survenir, la probabilité d'un événement élémentaire est $\frac{1}{16}$. Quand on s'intéresse aux produits, les résultats possibles sont $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16$. Alors, en comptant les cases du tableau où apparaissent un produit donné on a obtient :

$$p(\text{produit} = 1) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}} = \frac{1}{16}, p(\text{produit} = 2) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, p(\text{produit} = 3) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8},$$

$$p(\text{produit} = 4) = \frac{3}{16}, p(\text{produit} = 6) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, p(\text{produit} = 8) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, p(\text{produit} = 9) = \frac{1}{16},$$

$$p(\text{produit} = 12) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, p(\text{produit} = 16) = \frac{1}{16}.$$

b) L'événement $A =$"Ne pas obtenir un produit strictement supérieur à 9" est l'événement complémentaire de l'événement $B =$"Obtenir un produit strictement supérieur à 9", autrement dit $B =$"Obtenir un produit égal à 12 ou 16". Or $p(B) = p(\text{produit} = 12) + p(\text{produit} = 16) = \frac{3}{16}$. Et donc $p(A) = 1 - p(B) = \frac{16-3}{16} = \frac{13}{16}$.

On retient : pour un tirage avec remise l'univers est un produit de la population par elle-même (2 fois ou plus...). Si la population dans laquelle on effectue le tirage a un effectif de n et que le tirage est équiprobable, la probabilité élémentaire est donc $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 5.13 – Calcul de probabilités : tirage sans remise.

Décrivons l'univers. D'abord comme tous les brins de paille ont des longueurs différentes, on peut reconnaître le brin de paille par sa longueur, on peut donc identifier le brin de paille et sa longueur. Les deux tirages sont successifs donnent chacun un résultat partiel (la longueur du brin). Le résultat de l'expérience est constitué des deux résultats indiqués dans l'ordre d'apparition : on peut noter (x, y). L'observation effectuée est la somme des longueurs $x + y$.

Un tirage simple peut-être représenté par un arbre à un étage. Un tirage double peut-être représenté par un arbre à deux étages. A chaque noeud de l'arbre on peut indiquer le résultat des tirages effectués jusque là.

Dans ce cas il y a 4 brins de pailles, donc 4 branches à partir de la racine de l'arbre. Puis quand on a tiré un brin, il en reste trois, donc après la première brande, il y a trois branches.

Il y aura donc 12 extrémités, et chacune est équiprobable (de probabilité $\frac{1}{12}$).

a) Les tirages (x, y) possibles sont

$$(3,5),(3,6),(3,9),(5,3),(5,6),(5,9),(6,3),(6,5),(6,9),(9,3),(9,5),(9,6).$$

Les longueurs $(x+y)$ possibles sont donc $8, 9, 12, 8, 11, 14, 9, 11, 14, 12, 14, 15$, donc (en supprimant les doublons) : $8, 9, 11, 12, 14, 15$.

b) $p(\text{Longueur} = 11) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

c) $p(\text{Longueur} \leq 11) = p(\text{Longueur} = 11) + p(\text{Longueur} = 9) + p(\text{Longueur} = 8) = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

On remarque qu'il vaut mieux avoir tous les résultats en $\frac{}{12}$, seulement à la fin du calcul on simplifie la fraction.

d) C'est plus économique de calculer d'abord $p(\text{Longueur} = 15) = \frac{1}{12}$. Alors (en utilisant la règle des probabilités complémentaires) : $p(\text{Longueur} \neq 15) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

Recommandation : dans beaucoup d'exercices de probabilité, on peut reconnaître une des trois situations modèle rencontrée jusqu'ici : tirage simple, tirage double, avec remise, tirage sans remise. L'univers des possibles se représente par un arbre à un étage, un tableau à double entrée, ou un arbre à deux étages. Bien connaître ces modèles, et chercher à les retrouver dans tout exercice de probabilité !

Exercice 5.14 – Probabilités et polyèdres.

L'univers est constitué des paires possibles de résultats des dés. Donc $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4\}$. Cela se représente bien par un tableau à double entrée.

1-a) Si on ne lance que l'un des dés, la probabilité d'obtenir un 3 est de $\frac{1}{6}$ pour le dé cubique, et de $\frac{1}{4}$ pour le dé tétraédrique. Donc la probabilité est plus grande pour le dé tétraédrique.

1-b) Si on ne lance que l'un des dés, la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ pour le dé cubique, et de $\frac{1}{4}$ pour le dé tétraédrique. Donc la probabilité est plus grande pour le dé cubique.

1-c) Dans l'expérience aléatoire considérée ici on lance les deux dés. Pour trouver la probabilité de l'événement $A =$"Le nombre lu sur le dé tétraédrique est $\geq$ au nombre lu sur le dé cubique" il suffit de compter les cas favorables. Or $A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$, il y a donc 10 cas favorables, sur 24 cas possibles. Donc $p(A) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

2-a) Pour un nombre x lu sur le dé cubique, il y a toujours deux nombres possibles y sur le dé tétraédrique tels que $x + y$ est pair. Car si x est pair les solutions sont $y = 2$ et $y = 4$. Alors que si x est impair les solutions sont $y = 1$ et $y = 3$. A x fixé la moitié des cas est favorable. Donc pour l'événement B considéré on a

$$p(B) = \frac{2 \times \text{Nombre de } x \text{ possibles}}{\text{Nombre de cas total}} = \frac{2 \times 6}{4 \times 6} = \frac{1}{2}.$$

2-b) Il est très rapide de compter les cas favorables pour l'événement $C =$"La somme des nombres lus est ≤ 3" : il n'y a que les trois issues $(1,1),(1,2),(2,1)$. Donc $p(C) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$. L'événement dont on nous demande la probabilité est le complémentaire de C, donc sa probabilité est $1-p(C)$, soit $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

Exercice 5.15 – Calcul de probabilités : changements dans l'univers.

1) Il y a $3+4+5+6+7=25$ boules. Donc $p(\text{Tirer une boule bleue})=\frac{7}{25}=0,28$.

2) Si on rajoute r boules rouges il y a maintenant $25+r$ boules, donc $p(\text{Tirer une boule bleue})=\frac{7}{25+r}$. Alors $p(\text{Tirer une boule bleue})\leq 0,2 \iff \frac{7}{25+r}\leq 0,2 \iff \frac{7}{0,2}\leq 25+r \iff 35\leq 25+r$. Il faut donc rajouter au moins 10 boules rouges.

3) Si on rajoute b boules bleues il y a maintenant $25+b$ boules, et $p(\text{Tirer une boule bleue})=\frac{7+b}{25+b}$. Alors $p(\text{Tirer une boule bleue})\geq 0,4 \iff \frac{7+b}{25+b}\geq 0,4 \iff 7+b\geq 0,4(25+b)=10+0,4b$, soit $0.6b\geq 3$, donc $b\geq 5$.

Exercice 5.16 – Probas-stats.

1) Les nombres manquants sont, de gauche à droite, et de bas en haut :

$$22, 3794, 6308, 413, 384, 1254, 1909, 5023, 12527$$

2-a) $p=\frac{1737}{12527}\simeq 0,138$

2-b) $p=\frac{1542+5023}{12527}=\frac{6565}{12527}\simeq 0,524$

2-c) $p=\frac{1254+317}{12527}=\frac{1571}{12527}\simeq 0,125$