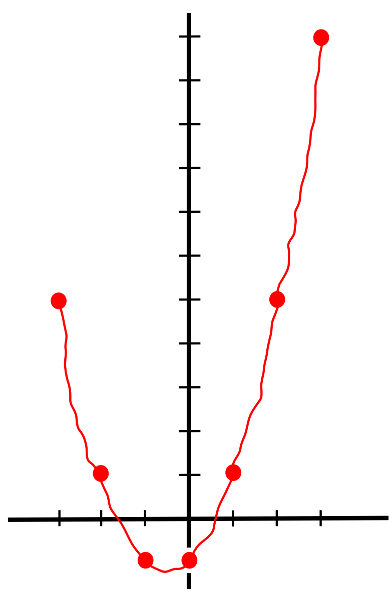
Université d'Orsay - Paris-Saclay — **M2 MEEF 1er degré**
2ème semestre 2024-2025 — **Mathématiques**

Cours : séance 2 (lundi 13 janvier)

Quatrième partie 4. **Fonctions.**

Exercice 4.6 – Tracer une représentation graphique.
Ici $f(x) = x^2 + x - 1$, et on doit d'abord remplir le tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	5	1	-1	-1	1	5	11



(Pour les tracés, ne pas oublier de se munir d'une équerre graduée !)
On trace les axes gradués, en respectant l'unité imposée par l'énoncé. Puis on marque les 7 points donnés par le tableau de valeurs $((-3; 5), (-2; 1), (-1; -1), (0; -1), (1; 1), (2; 5), (3; 11))$: une colonne, un point. Enfin on relie à peu près les points.

Exercice 4.7 – Lire une représentation graphique (1).
Il faut simplement faire attention à l'axe des x et l'axe des $f(x)$.

1. Le sous-entendu c'est que l'achat coïncide avec la première mise en circulation : donc c'est au temps 0. (a) A ce moment-là, la voiture coûte 22.000 euros. (b) 5 ans après on lit un prix de 8.000 euros. (c) Enfin 7 ans et demi après l'achat on devine un prix de 5.000 euros.

2. La moitié de la valeur (initiale) c'est $\frac{22.000}{2} = 11.000$ euros. L'antécédent de 11.000 est 3 : donc c'est au bout de 3 ans que la voiture perd la moitié de sa valeur.

Exercice 4.8 – Lire une représentation graphique (2).

Trouver une image, c'est prendre un x - donc un point de l'axe horizontal ! Et se déplacer verticalement jusqu'à rencontrer la courbe. Ce point de la courbe permet de trouver $f(x)$: il suffit de rabattre le point horizontalement sur l'axe vertical, et de lire la graduation.

Ainsi $g(-1) = 1$, $g(3) = 0$, $g(7) = -2$, $g(5,5) = -3,1$ ou $-3,2$.

Trouver un antécédent, c'est prendre un y - donc un point de l'axe vertical. Et se déplacer horizontalement jusqu'à rencontrer la courbe. La droite horizontale peut couper la courbe en un point, ou plusieurs points, ou même aucun. Si on choisit un tel point de la courbe, cela permet de trouver un antécédent x : il suffit de rabattre le point verticalement sur l'axe horizontal, et de lire la graduation.

Ainsi 4 et 7 sont des antécédents de -2. Et 0 et 2 sont des antécédents de 2.

Exercice 4.9 – Formule algébrique plus compliquée.

x	-3	-1	0	3	5
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	0	-1	2	$\frac{3}{2}$

Pour $x = 1$ l'expression $\frac{x+1}{x-1}$ donne $\frac{2}{0}$, donc n'a pas de sens. L'expression $\frac{x+1}{x-1}$ a un sens précisément lorsque le dénominateur n'est pas nul, soit $x \neq 1$. (Donc le domaine de définition est $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.)

Exercice 4.10 – Reconnaître une fonction linéaire. Quand une fonction est linéaire, $f(x) = ax$, ses tableaux de valeurs doivent être des tableaux de proportionnalité (on passe de la ligne du haut à la ligne du bas en multipliant par le même nombre dans chaque colonne - ce coefficient multiplicateur est a).

Ici le tableau de valeurs (ici en colonnes !) n'est pas (tout à fait) un tableau de proportionnalité donc la fonction n'est pas (tout à fait) linéaire. Cependant la représentation graphique de f est presque une droite ! Donc f n'est pas loin d'être linéaire : le nombre $\frac{f(x)}{x}$ est presque indépendant de x, on trouve $9,2; 9,25; 9,23; 9,25; 9,28; 9,28; 9,3; 9,31; 9,32; 9,33$...

Remarque : la représentation graphique d'une fonction linéaire est toujours une droite passant par l'origine, et de coefficient directeur a. C'est ce qui pouvait faire croire

Exercice 4.11 – Reconnaître une fonction affine, retrouver ses éléments caractéristiques.

Une fonction f est affine si elle donnée par une formule de la forme $f(x) = ax + b$ (avec a, b deux nombres réels explicites). Ne jamais oublier que l'expression algébrique $ax+b$ représente simplement le calcul "a fois x plus b". Par exemple $f(x) = 10x - 3$ ou $f(x) = (-6)x + 5$. On note qu'une fonction linéaire $f(x) = ax$ est une fonction affine particulière : son b vaut 0. Par exemple $f(x) = 500x$ est linéaire, donc affine ($a = 500, b = 0$).

Tous les accroissements d'une fonction affine sont proportionnels à l'accroissement de la variable : $f(x') - f(x) = a(x' - x)$. Cela donne une méthode pour retrouver le coefficient a : si on connaît l'image de deux réels par la fonction affine x_2, x_1, alors on a $\boxed{a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$. Ou encore, en utilisant Δ pour désigner les accroissements : $\boxed{a = \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}}$. Pour retrouver b c'est encore plus facile : $b = f(0)$ (c'est l'image de 0 par la fonction affine). Ou alors $b = f(x_1) - ax_1$ si on a réussi à trouver a et que l'on connaît $f(x_1)$.

Les constantes caractéristiques a, b peuvent se retrouver par les calculs précédents mais aussi par des considérations graphiques. En effet la représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax+b$ est toujours une droite passant par le point $(0; b)$, et de coefficient directeur a.

Noter que le coefficient directeur a s'appelle parfois la *pente* de la droite. C'est assez parlant car quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de a. En effet $f(x+1) = a(x+1)+b = ax+a+b = ax+b+a$, et donc $f(x+1) = f(x) + a$. La propriété $\boxed{f(x+1) - f(x) = a}$ (indépendant de la variable x) est très particulière aux fonctions affines.

1. Les fonctions f, g, h, i, j sont affines, et i est même linéaire (encore mieux). La fonction k n'est pas affine car $\dfrac{k(x) - k(0)}{x - 0} = x$, qui n'est pas constant ! De même la fonction ℓ n'est pas affine car $\dfrac{\ell(x) - \ell(-1)}{x - (-1)} = \dfrac{(x+1)^2 - 0}{x+1} = x + 1$, qui n'est pas constant !

2. ...

Exercice 4.12 – **Retrouver l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur à l'aide deux valeurs.**

L'idée est d'abord de retrouver le coefficient directeur par la formule $a = \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, puis de trouver b à l'aide de $b = f(x_1) - ax_1$ pour un x_1 bien choisi.

a) $a = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{2}{2} = 1$. Puis $b = f(3) - 3a = 5 - 2 = 3$. Donc $f(x) = ax + b = x + 3$.

b) $a = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{4}{2} = 2$. Puis $b = f(3) - 3a = 5 - 6 = -1$. Donc $f(x) = ax + b = 2x - 1$.

c) $a = \dfrac{f(10) - f(3)}{10 - 3} = \dfrac{14}{7} = 2$. Puis $b = f(3) - 3a = 6 - 6 = 0$. Donc $f(x) = ax+b = 2x$ (fonction linéaire).

d) $a = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \dfrac{-3}{3} = -1$. Puis $b = f(2) - 2a = (-2) - (-2) = 0$. Donc $f(x) = ax+b = -x$ (fonction linéaire).

e) $a = \dfrac{f(12) - f(5)}{12 - 5} = \dfrac{0}{7} = 0$. Puis $b = f(5) - 5a = 14 - 0 = 14$. Donc $f(x) = ax + b = 14$ (fonction constante).

f) D'après le graphique on a $f(-1) = 10$ et $f(7) = 30$. Donc $a = \dfrac{f(7) - f(-1)}{7 - (-1)} = \dfrac{20}{8} = \dfrac{5}{2}$. Puis $b = f(-1) - (-1)a = 10 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{25}{2}$. Donc $f(x) = ax + b = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{25}{2}$. Remarque la détermination de b par lecture de l'abscisse à l'origine est un peu délicate car l'échelle n'est pas adaptée.

f) D'après le graphique on a $f(0) = 30$. Donc $b = 30$. Et $f(1) = 10$, donc $a + b = 10$, d'où $a = 10 - 30 = -20$. Alors $f(x) = ax + b = -20x + 10$.

Exercice 4.13 – Résolution graphique d'équation (I).

1. (Attention aux unités.) On voit que $f(3) = 15$ (chaque graduation représente 2 unités, puisqu'il y a 5 graduations entre 10 et 20). Et $g(3) = -10,5$ environ (entre -11 et -10 en tous cas).

2. Si x est un nombre tel que $f(x) = g(x)$ alors les points de coordonnées $(x; f(x))$ et $(x; g(x))$ sont identiques. Et réciproquement : si les courbes représentatives de f et g se coupent en un point $(x; y)$ alors on a à la fois $y = f(x)$, et aussi $y = g(x)$, donc pour finir $f(x) = g(x)$. Dans notre cas les courbes représentatives se coupent aux points d'abscisses -1 et 7. Donc les valeurs de x pour lesquelles on a $f(x) = g(x)$ sont $x = -1$ et $x = 7$.

Exercice 4.14 – Résolution graphique d'équation (II).

a) Comme précédemment, résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$ revient à trouver les abscisses x des points d'intersection des deux courbes représentatives. On lit : $x = 1$ et $x = 3$. Vérifions par le raisonnement algébrique :

$$f(x) = g(x) \iff x^2 = 4x - 3 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x-1)(x-3) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

Exercice 4.15 – Lecture graphique.

1. D'après la formule on a $S(10) = 2,5 - \dfrac{35^2}{1210} = 2,5 - \dfrac{1225}{1210} = 2,5 - 1,01 = 1,49$. Cela signifie que 10 mètres (horizontaux) après le début du saut, le skieur s'est élevé de 1,49 mètres. (C'est cohérent avec ce que montre le graphique.)

2.

a) Après 55 mètres (horizontaux) le skieur retouche terre - ou en tous cas revient à la même altitude qu'au début du saut.

b) La hauteur maximale du saut du skieur est de 2,5 mètres (c'est cohérent avec ce que montre la formule). Elle est atteinte lorsque $S(x) = 2,5$, autrement dit lorsque $\dfrac{(2x-55)^2}{1210} = 0$, c'est à dire $2x = 55$, ou encore $x = \dfrac{55}{2} = 27,5$. Donc le déplacement horizontal correspondant à la plus grande hauteur est de $27,5$ mètres. (C'est cohérent avec ce que montre le graphique.)

3. Puisqu'un nombre au carré est toujours ≥ 0, la quantité $-\dfrac{(2x-55)^2}{1210}$ est toujours ≤ 0, donc on voit que $S(x) \leq 2,5$. Ainsi la valeur maximale possible de $S(x)$ est bien $2,5$.

Exercice 4.16 – Visualisation des accroissements sur le graphiques.

Le graphique proposé est une droite, et même une droite qui passe par l'origine. Donc cela correspondrait à une expression de $V(h)$ comme fonction affine. Pour une fonction affine f l'accroissement de $f(x)$ est proportionnel à l'accroissement de x : $T = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est un coefficient indépendant des réels x_1, x_2 (distincts).

Or ici lorsqu'on prend $x_2 = x_1+$ petite valeur constante (1 millimètre ? en tous cas quelque chose de petit par rapport au rayon de l'espèce de boule) on voit que le taux d'accroissement T est toujours ≥ 0, petit au début, puis grandit jusqu'à ce que x_1 atteigne la moitié du bocal, et ensuite rediminue. Il n'est donc pas constant. Le volume V en fonction de la hauteur h n'est pas représenté par le graphique proposé.

La forme qui donnerait un volume linéaire par rapport à la hauteur est le *cylindre*. Un cylindre dont la base a une surface de S centimètres cubes et de hauteur h centimètres a un volume donné par la formule $V = S \times h$ (base fois hauteur), qui est bien proportionnel à la hauteur. Quand on ajoute 1mm d'eau dans un bocal cylindrique déjà partiellement rempli l'augmentation du volume est toujours la même, quelle que soit la hauteur d'eau déjà versée.

Remarque : La formule exacte du volume considéré lorsque le bocal sphérique est rempli d'eau à la hauteur h est en fait $V(h) = \pi h^2(R - \frac{1}{3}h)$, où R désigne le rayon de la sphère (pour $h = 2R$ le bocal est complètement rempli et on retrouve bien le volume entouré par une sphère : $\frac{4}{3}\pi R^3$). La formule contient des termes en h^3 et h^2, on retrouve bien le fait que ce n'est linéaire (ni affine) par rapport à h.

Exercice 4.17 – Etude d'une fonction pour étudier une quantité géométrique.

1. Il suffit de développer en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2$: $4-(x-\frac{3}{2})^2 = 4-[x^2-3x+\frac{9}{4}] = (4-\frac{9}{4})+3x-x^2$. Puis on calcule $4-\frac{9}{4} = \frac{16-9}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$. On retrouve bien que $A(x) = 4-(x-\frac{3}{2})^2$.

2. La formule doit permettre de calculer une aire. Or une aire est toujours ≥ 0. Donc les x pour lesquels la formule est cohérente sont les x tels que $A(x) \geq 0$. Soit $4 \geq (x-\frac{3}{2})^2 \iff 2 \geq |x-\frac{3}{2}| \iff -2 \leq x - \frac{3}{2} \leq 2$, ou encore $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$.

3. La fonction $A(x)$ prend des valeur ≤ 4 car un carré est toujours ≥ 0. Et elle vaut 4 précisément lorsque $(x - \frac{3}{2})^2 = 0$, soit $x = \frac{3}{2}$. Ainsi l'aire $A(x)$ est maximale lorsque $x = \frac{3}{2}$, elle vaut alors 4.

$\longrightarrow$ Pour la prochaine séance : *Memento Proba-Stat. Interro Fonctions*