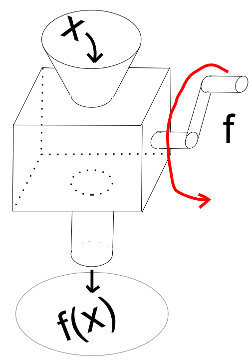
Fait à la séance 1 (lundi 6 janvier)

Quatrième partie 4. Fonctions.

Le cours pour le 6 janvier c'était le mémo sur les fonctions et leurs représentations.

- Une fonction permet d'exprimer un lien, une relation entre deux quantités.

- La fonction est "à sens unique" : il y a une quantité au départ (souvent noté x), la fonction travaille dessus, et produit alors une quantité à l'arrivée (notée $f(x)$ si f est le nom de la fonction, comme c'est souvent le cas).
  Comme si f sculptait le x de départ pour produire l'image $f(x)$.



- Souvent le travail effectué par la fonction est décrit par une formule algébrique.
- La représentation graphique permet de visualiser le lien entre la quantité de départ x et son image $f(x)$.
- Les propriétés algébriques particulières de la formule de f correspondent à des propriétés géométriques de la représentation graphique.

Exercice 4.1 – Faire le lien...

1. Tout d'abord c'est le temps de cuisson qui dépend de la masse du poulet. Autrement dit le temps de cuisson est fonction de la masse du poulet. On devrait donc pouvoir exprimer le temps de cuisson en fonction de la masse du poulet.

On peut penser que si le poulet est 2 fois plus gros il faut le cuire 2 fois plus longtemps... Alors Temps de cuisson = constante × masse du poulet. La constante serait-elle 1h / kg ? En fait cela dépend de la température de cuisson utilisée... $T(m) = K \times m$. Dans une situation concrète on doit penser à indiquer les unités : ici le temps en heures, et la masse en kilogrammes.

La fonction $m \mapsto T(m)$ est donc de la forme $m \mapsto Km$ (avec K une constante), c'est ce qu'on appelle une fonction *linéaire*.

2. Tout d'abord c'est le montant de l'affranchissement qui dépend du poids du colis. Autrement dit le montant de l'affranchissement est fonction du poids du colis. On devrait donc pouvoir exprimer le montant de l'affranchissement en fonction du poids du colis.

Disons qu'on considère un envoi à une distance donnée, et par un mode d'expédition fixé. On peut penser que pour chaque kg supplémentaire de colis il faut payer tant en plus... De plus il y a un coût fixe de départ : même pour transporter une petite lettre, il faut mobiliser toute une infrastructure. Alors Montant de l'affranchissement = coût fixe, plus constante × poids du colis. Soit $M(p) = C_0 + K \times p$. (Le montant $M(p)$ est en euros, le poids en grammes.)

La fonction $p \mapsto M(p)$ est donc de la forme $p \mapsto Kp + C_0$ (avec K, C_0 des constantes), c'est ce qu'on appelle une fonction *affine*.

3. Le prix à payer est proportionnel à la durée de stationnement : $P = K \times d$.

4. A finir chez soi.

Exercice 4.2 – La formule décrit l'action de la fonction.

Le symbole $\mapsto$ explique comment la fonction transforme le x de départ. On lit $x \mapsto \ldots$ de différentes manières, qui sont synonymes :

(1) "f envoie x sur ...",

(2) "f transforme x en ...",

(3) "La valeur de f en x est ...", ou encore :

(4) "L'image de x par f est ..."

On peut décrire la transformation que f fait subir à la donnée x soit par *une phrase*, soit par *une formule algébrique*. Ces deux descriptions sont équivalentes, mais utilisent des langages différents. Avec de la pratique on finit par s'habituer aux formules, et à les trouver plus maniables que les mots !

1. La moitié d'un nombre c'est $\dfrac{\text{nombre}}{2}$, donc la moitié de x c'est $\dfrac{x}{2}$. La fonction recherchée est donc la fonction g.

2. L'inverse d'un nombre c'est $\dfrac{1}{\text{nombre}}$, donc l'inverse de x c'est $\dfrac{1}{x}$. La fonction recherchée est donc la fonction h.

3. Transformer un nombre x en $2x$, c'est prendre son double. Donc f est la fonction qui à un nombre associe son double. Transformer un nombre x en $-x$, c'est prendre son opposé. Donc k est la fonction qui à un nombre associe son opposé.

Exercice 4.3 – La formule permet le calcul des images et la recherche des antécédents.

1. Le nombre donné est le "x", il faut trouver son *image*, c'est à dire en quel nombre la formule transforme ce x. Ici la formule décrivant f est $f(x) = 2x - 3$ (on remarque que c'est une fonction affine...). On va juste remplacer la variable x par la valeur explicite donnée dans l'énoncé. Donc

a) l'image de $x = 5$ est $f(5) = 2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$,
b) l'image de $x = 3$ est $f(3) = 2 \times 3 - 3 = 6 - 3 = 3$,
c) l'image de $x = 2$ est $f(2) = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$,
d) l'image de $x = 0$ est $f(0) = 2 \times 0 - 3 = 0 - 3 = -3$,
e) l'image de $x = -1$ est $f(-1) = 2 \times (-1) - 3 = -2 - 3 = -5$.

On constate que pour tout nombre x, on ne peut calculer qu'une seule image ! Trouver une image, c'est faire un calcul en utilisant la formule de f.

2. Le nombre donné est un "y", il faut trouver un *antécédent*, c'est à dire un nombre x dont l'image est y. En d'autres termes il faut résoudre l'équation $f(x) = y$. Donc

a) un antécédent de $y = 1$ est un nombre x qui vérifie $f(x) = 1$, c'est à dire $2x - 3 = 1$. Et $2x - 3 = 1 \iff 2x = 1 + 3 = 4 \iff x = \dfrac{4}{2} = 2$. Donc 2 est un antécédent de 1 par f (dans ce cas il est unique).

b) un antécédent de $y = 6$ est un nombre x qui vérifie $f(x) = 6$, c'est à dire $2x - 3 = 6$. Et $2x - 3 = 6 \iff 2x = 6 + 3 = 9 \iff x = \dfrac{9}{2} = 4,5$. Donc $\dfrac{9}{2}$ est un antécédent de 6 par f (unique dans ce cas).

c) un antécédent de $y = 0$ est un nombre x qui vérifie $f(x) = 0$, c'est à dire $2x - 3 = 0$. Et $2x - 3 = 0 \iff 2x = 3 \iff x = \dfrac{3}{2} = 1,5$. Donc $\dfrac{3}{2}$ est un antécédent de 0 par f (unique dans ce cas).

d) un antécédent de $y = 3$ est un nombre x qui vérifie $f(x) = 3$, c'est à dire $2x - 3 = 3$. Et $2x - 3 = 3 \iff 2x = 3 + 3 = 6 \iff x = \dfrac{6}{2} = 3$. Donc 3 est un antécédent de 3 par f (unique dans ce cas).

En fait pour une fonction affine $f(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$, il existe toujours un unique antécédent... Mais pour des fonctions plus compliquées qu'affines et pour un nombre y donné, il pourrait exister zéro, un ou plusieurs antécédents de y ! Trouver un antécédent, c'est résoudre une équation en utilisant la formule de f.

Exercice 4.4 – Formule verbale, formule algébrique.

Comme très souvent dans les exercices de l'épreuve de maths du concours de professeur.e des écoles, une bonne partie de la difficulté réside ici dans la bonne compréhension de ce que signifie l'énoncé !

1. Décomposons : le double de l'inverse du carré... Le double de l'inverse du carré de 1 ? D'abord le carré de 1. Puis l'inverse de ceci. Enfin le double de cela... La phrase française utilise les mots dans l'ordre inverse des opérations effectuées. Alors :

a) $g(1) = 2 \times \dfrac{1}{1^2} = 2 \times \dfrac{1}{1} = 2 \times 1 = 2$.

b) $g(2) = 2 \times \dfrac{1}{2^2} = 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

c) $g(-4) = 2 \times \dfrac{1}{(-4)^2} = 2 \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.

d) $g(-4) = 2 \times \dfrac{1}{(-\frac{3}{2})^2} = 2 \times \dfrac{1}{\frac{9}{4}} = 2 \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{8}{9} = 0,888...$.

2. Le double de l'inverse du carré d'un nombre x c'est $2 \times \dfrac{1}{x^2}$, soit $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$.

Cette formule n'est pas toujours définie, car elle fait intervenir un dénominateur. En fait $g(x)$ peut être calculé si et seulement si $x^2 \neq 0$, ce qui équivaut à $x \neq 0$.

Le domaine de définition de g étant justement l'ensemble des nombres x pour lesquels $g(x)$ est défini, on en déduit que ce domaine de définition est l'ensemble de tous les réels sauf 0, soit encore $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ (parfois noté $\mathbb{R}^*$).

Exercice 4.5 – Utilisation du tableau de valeurs.

Dans un tableau de valeurs d'une fonction, il y a deux lignes et un nombre arbitraire de colonnes. Dans la première colonne on met en haut x et en bas la fonction de x (ici $j(x)$). Dans les colonnes suivantes on met dans les cases de la première ligne différentes valeurs possibles du nombre x (ici $-2, 2, -1, 1, 0$), à chaque fois dans la case juste au dessous on met la valeur correspondante de $j(x)$ (ici $1, 0, 1, -1, -2$), donc l'image du nombre dans la case du dessus.

Trouver l'image, c'est descendre de la ligne des x à la ligne des $f(x)$ (en restant dans la même colonne).

Trouver un antécédent, c'est remonter de la ligne des $f(x)$ à la ligne des x (en restant dans la même colonne).

1. En repérant $2, 1, 0$ dans la ligne du haut et en regardant juste au dessous on trouve $j(2) = 0, j(1) = -1, j(0) = -2$.

2. En repérant $-1, 1, -2$ dans la ligne du bas et en regardant juste au dessus on trouve que : un antécédent de -1 par j est 1, un antécédent de 1 par j est -2 ou -1 (car il y a deux colonnes dont la case du bas porte 1), un antécédent de -2 par j est 0.

3. La question posée revient exactement à donner un antécédent de $y = 1$, travail déjà effectué à la question précédente : $x = -2$ ou $x = -1$ sont des antécédents de 1 par j.

Exercice 4.6 – Tracer une représentation graphique.

Pour les tracés, ne pas oublier de se munir d'une équerre graduée !

Par convention, la donnée de départ (la variable x) est portée sur l'axe gradué horizontal (lequel est orienté de gauche à droite). Et le résultat de la fonction ($f(x)$) se lit sur l'axe gradué vertical (lequel est orienté de bas en haut).

Pour chaque nombre x de départ, après avoir trouvé $f(x)$ (par la formule algébrique ou par le tableau de valeurs), on peut alors marquer le point $M(x)$ d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$. En d'autres termes $M(x)$ est à l'intersection de la droite verticale passant par la graduation x de l'axe horizontal, et de la droite horizontale passant par la graduation $f(x)$ de l'axe vertical.

En prenant tous les x possibles cela donne un ensemble de points $M(x)$: la courbe représentative de la fonction f. Dans la pratique on ne considère qu'un nombre fini de x suffisamment rapprochés sur l'axe des abscisses, on note les points correspondant, et on les relie à main levée.

$\longrightarrow$ Pour la prochaine séance : *Exercice 4.1.(d) et 4.6.*