École universitaire Paris-Saclay | Année 2022-2023
Licence de mathématiques 1ère année | Semestre 2

MEU152 – Examen final du Mercredi 17 Mai 2023

Durée : 2h00.

La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Merci de bien vouloir $\boxed{\text{encadrer}}$ *les résultats obtenus, et de **ne pas écrire au crayon à papier**. L'utilisation de la calculatrice et des notes de cours n'est pas autorisée.*

Exercice 1 (questions de cours)**.** *Pour la première question, on demande **une démonstration** (pas simplement de citer le cours), et on demande de justifier la deuxième et troisième question.*

(1) Soit E un espace vectoriel. Montrer que si $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection, alors $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E.

(2) Existe-t-il une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont l'image est le disque unité $D = \{(x,y) |\ x^2+y^2 \leq 1\}$?

(3) Existe-t-il une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ qui soit surjective ?

Solution de l'Exercice 1. (1) Soit $x \in \ker p \cap \operatorname{Im} p$, alors $x \in \operatorname{Im} p$ donc il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. De plus $x \in \ker p$ donc $0 = p(x) = p(p(y)) = p(y)$ car p est une projection donc $p \circ p = p$. Donc $x = p(y) = 0$ et $\ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$.

Soit $x \in E$. Alors

$$x = p(x) + (x - p(x)),$$

et par définition $p(x) \in \operatorname{Im} p$. De plus on calcule

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0,$$

car p est une projection donc $p \circ p = p$. Donc $x - p(x) \in \ker p$ et $x \in \ker p + \operatorname{Im} p$. Donc $\ker p + \operatorname{Im} p = E$ donc $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.

(2) Pour toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\operatorname{Im} f$ est un SEV de F. Or D n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^2$ (par exemple $(1,0) \in D$ mais $2 \cdot (1,0) = (2,0) \notin D$). Donc une application linéaire ne peut pas avoir comme image D, donc il n'existe pas de f comme dans l'énoncé.

(3) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Par le théorème du rang on a donc

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Comme $\dim \ker f \geq 0$ (comme la dimension est un entier positif), on a que $\dim \operatorname{Im} f \leq 2$. Donc $\operatorname{Im} f$ ne peut pas être égal à $\mathbb{R}^3$ (sinon $\operatorname{Im} f$ serait de dimension 3), donc f ne peut pas être surjective.

Exercice 2. On note

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 2P' - P'' \end{array}$$

(1) Rappeler quelle est la base canonique B de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner $\dim \mathbb{R}_3[X]$.

(2) Donner la matrice A de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}_3[X]$.

(3) On admet que $B' = (X^3, 6X^2 - 6X, 24X - 24, 48)$ est libre. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(4) Montrer que la matrice de passage $P_{B,B'}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -24 & 48 \\ 0 & -6 & 24 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) Que vaut $P_{B',B}$?

(6) Donner la matrice M de f dans la base B'.

(7) Que vaut A^4 ? (*On pourra éventuellement calculer M^4*)

Solution de l'Exercice 2. (1) La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$. On a (donc) $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$.

(2) On calcule les images de la base canonique par f.

$$f(1) = 0, \quad f(X) = 2, \quad f(X^2) = 4X - 2, \quad f(X^3) = 6X^2 - 6X.$$

On a donc, en décomposant ces vecteurs dans la base canonique, que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) B' est composée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$, c'est donc une base si et seulement si B' est libre.

(4) Il suffit d'écrire les vecteurs de B' en colonne dans la base canonique, et on a bien

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -24 & 48 \\ 0 & -6 & 24 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) On a $P_{B',B} = P_{B,B'}^{-1}$. Calculons cette matrice à l'aide du pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -24 & 48 \\ 0 & -6 & 24 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 48 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 48 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$P_{B',B} = P_{B,B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & 0 \end{pmatrix}.$$

(6) On a

$$f(X^3) = 6X^2 - 6X = 0 \cdot X^3 + 1 \cdot (6X^2 - 6X) + 0 \cdot (24X - 24) + 0 \cdot 48.$$

De même,

$$f(6X^2 - 6X) = 6f(X^2) - 6f(X) = 6(4X - 2) - 6 \cdot 2 = 24X - 24 = 1 \cdot (24X - 24)$$

et

$$f(24X - 24) = 24f(X) - 24f(1) = 24 \cdot 2 = 1 \cdot 48.$$

De plus $f(48) = 0$. On a donc

$$M = \mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(7) Comme pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\deg f(P) \leq \deg P - 1$ car $\deg P', \deg P'' \leq \deg P - 1$, on a donc que $\deg f^4(P) \leq \deg P - 4$. Or $\deg P \leq 3$ donc $\deg f^4(P) < 0$ donc $f^4(P) = 0$. En particulier, puisque A est la matrice de f dans la base canonique, f^4 a pour matrice A^4 dans la base canonique donc $A^4 = 0$.

On aurait aussi pu calculer M^4, et on voit que $M^4 = 0$ puisque $M^4 = (M^2)^2$ et

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que $f^4 = 0$ puisque f^4 a pour matrice $M^4 = 0$ dans la base B'. Donc $A^4 = 0$ puisque c'est la matrice de f^4 dans la base B.

Exercice 3. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On s'intéresse à l'application linéaire

$$s_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \frac{1}{10}(x + 9y + 6z, 9x + y - 6z, 3x - 3y + 8z) \end{array}$$

(1) Donner la matrice A_1 de s_1 dans la base canonique B.

(2) Calculer A_1^2.

(3) En déduire que s_1 est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ et donner son inverse.

On note $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y + z = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}(2, -2, 1)$.

(4) Montrer que Q et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Soit s_2 la symétrie par rapport à Q parallèlement à D. On note

$$e_1 = (1, -1, 0), e_2 = (0, 0, 1), e_3 = (1, 1, 0).$$

(5) Montrer que $B' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(6) (a) Montrer que $s_1(e_1) = -\frac{4}{5}e_1 + \frac{3}{5}e_2$.

(b) Exprimer de même $s_1(e_2)$ et $s_1(e_3)$ en fonction de e_1, e_2, e_3. En déduire que la matrice M_1 de s_1 dans la base B' est

$$M_1 = \mathrm{Mat}_{B'}(s_1) = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(7) (a) Si $v \in \mathbb{R}^3$ se décompose sous la forme

$$v = (x, y, z) + t(2, -2, 1), \qquad \text{avec } x - y + z = 0,$$

que vaut $s_2(v)$?

(b) En utilisant la question précédente, exprimer $s_2(e_1), s_2(e_2)$ et $s_2(e_3)$ dans la base canonique et dans la base B'.

(c) En déduire que la matrice M_2 de s_2 dans la base B' est

$$M_2 = \mathrm{Mat}_{B'}(s_2) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(8) On note $r = s_2 \circ s_1$. Donner la matrice R de r dans la base B'.

(9) Donner la matrice de r^7 dans la base B'.

(10) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner une expression de $r^7(x, y, z)$ en fonction de x, y, z.

Solution de l'Exercice 3. (1) Vu l'expression de s_1, la matrice de s_1 dans la base canonique est

$$A_1 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 9 & 1 & -6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

(2) On a

$$A_1^2 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 9 & 1 & -6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 9 & 1 & -6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 1+9^2+6*3 & 9+9-3*6 & 6-6*9+8*6 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

(3) On a donc $A_1^2 = I_3$ donc $\mathrm{Mat}_B(s_1^2) = I_3$ donc $s_1^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ donc s_1 est une symétrie, et donc est son propre inverse, i.e. $s_1^{-1} = s_1$.

(4) Soit $v \in D \cap Q$. On peut donc écrire $v = t(2,-2,1)$ car $v \in D$. Comme $v \in Q$, on a $2t+2t+t = 5t = 0$, donc $t = 0$ donc $v = 0$. Donc $D \cap Q = \{0\}$. Comme $D + Q \subset \mathbb{R}^3$ et

$$\dim(D+Q) = \dim D + \dim Q - \dim D\cap Q = \dim D + \dim Q = 1+2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

on déduit que $D + Q = \mathbb{R}^3$. Donc $D \oplus Q = \mathbb{R}^3$ i.e. D et Q sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(5) On calcule $\lambda e_1 + \mu e_2 + \gamma e_3 = 0$, on a le système

$$\begin{cases} \lambda + \gamma &= 0 \\ \gamma - \lambda &= 0 \\ \mu &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \gamma &= 0 \\ 2\gamma &= 0 \\ \mu &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= 0 \\ \gamma &= 0 \\ \mu &= 0 \end{cases}$$

Donc (e_1, e_2, e_3) est une famille libre, comme elle est constituée de $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(6) (a) On calcule $s_1(e_1) = 1/10(-8,8,6) = -4/5e_1 + 3/5e_2$

(b) De même, $s_1(e_2) = 1/10(6,-6,8) = 3/5e_1 + 4/5e_2)$ $s_1(e_3) = 1/10(10,10,0) = e_3$. Donc

$$M_1 = \mathrm{Mat}_{B'}(s_1) = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(7) (a) Si $v = (x,y,z) + t(2,-2,1)$ avec $x - y + z = 0$, alors $(x,y,z) \in Q$ et $t(2,-2,1) \in D$ donc par définition de s_2, on a

$$s_2(v) = (x,y,z) - t(2,-2,1).$$

(b) On calcule donc pour décomposer dans $Q \oplus D$ comme dans la question précédente. On cherche à résoudre

$$e_1 = (1,-1,0) = (x,y,z) + t(2,-2,1), \quad \text{avec } x - y + z = 0.$$

Cela équivaut au système

$$\begin{cases} x + 2t &= 1 \\ y - 2t &= -1 \\ z + t = 0 \end{cases} \underset{L3 \leftarrow L3 - L2 + L1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2t &= 1 \\ y - 2t &= -1 \\ z + t - y + 2t + x + 2t &= x - y + z + 5t = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \\ y &= -1 + \frac{4}{5} = -\frac{1}{5} \\ t &= 2/5 \end{cases}$$

Donc,

$$e_1 = (1/5, -1/5, -2/5) + 2/5(2,-2,1), \quad \text{donc } s_2(e_1) = (-3/5, 3/5, -4/5).$$

De même,

$$e_2 = (0,0,1) = (-2/5, 2/5, 4/5) + 1/5(2,-2,1) \quad s_2(e_2) = (-4/5, 4/5, 3/5)$$

$$e_3 = (1,1,0) = (1,1,0) + 0 \quad s_2(e_3) = (1,1,0)$$

Donc

$$s_2(e_1) = -3/5e_1 - 4/5e_2, s_2(e_2) = -4/5e_1 + 3/5e_2, s(e_3) = e_3.$$

(c) On a donc, en écrivant en colonne les coordonnées des $s(e_i)$ dans la base $B' = (e_1, e_2, e_3)$,

$$\mathrm{Mat}_{B'}(s_2) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(8) On a $\mathrm{Mat}_{B'}(s_2 \circ s_1) = \mathrm{Mat}_{B'}(s_2)\mathrm{Mat}_{B'}(s_1) = M_2M_1$, donc

$$\mathrm{Mat}_{B'}(r) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(9) Un calcul direct montre que $R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$R^7 = (R^2)^3 \times R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(10) Pour pouvoir écrire une formule pour $r^7(x, y, z)$, il suffit de connaitre la matrice de r^7 dans la base canonique. On a alors en posant $P = P_{B,B'}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$P^{-1} = P_{B',B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_B(r^7) = P_{B,B'}\mathrm{Mat}_{B'}(r^7)P_{B',B} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et donc

$$r^7(x, y, z) = \frac{1}{2}(x + y + 2z, x + y - 2z, -x + y).$$