MEU152 – examen partiel du Lundi 21 mars 2022

Durée : 2h00.

La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Merci de bien vouloir $\boxed{\textit{encadrer}}$ *les résultats obtenus, et de* ***ne pas écrire au crayon à papier****. L'utilisation de la calculatrice et des notes de cours n'est pas autorisée.*

Exercice 1 (questions de cours)**.** *Les trois questions sont indépendantes les unes des autres. Pour les deux premières, on demande* ***une démonstration****, et pas simplement de citer le cours, et on demande de justifier aussi la troisième question.*

(1) Soit E un espace vectoriel et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que toute sous-famille de $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre.
(2) Soit E un espace vectoriel et $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
(3) Montrer que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, où on a posé

$$v_1 = (1, -1, 0, 2),\ v_2 = (2, 1, 3, 1),\ w_1 = (1, 1, 1, 1),\ w_2 = (3, -4, 4, 2),\ w_3 = (3, -11, 5, 1).$$

(1) Donner une base de F. Quelle est sa dimension ?
(2) Donner une base de G. Quelle est sa dimension ?
(3) Donner une famille génératrice de $F + G$.
(4) Extraire une base de la famille précédente et en déduire la dimension de $F + G$.
(5) Donner une (ou des) équation(s) cartésienne(s) de $F + G$.
(6) Calculer $\dim F \cap G$.

Exercice 3. On dit qu'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ est *symétrique* si $A^t = A$ (i.e. si elle est égale à sa transposé). On note $S_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) |\ A = A^t\}$ l'ensemble des matrices symétriques. On rappelle que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ on note $A^t := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que $S_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
(2) Montrer que $S_2(\mathbb{R})$ est de dimension 3 dont une base est

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

forment une base de $S_2(\mathbb{R})$.

(4) Si a, b, c sont quelconques dans $\mathbb{R}$, décomposer dans la base (A, B, C) la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Exercice 4. On note l'ensemble $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + 3y - z = 0\}$, inclus dans $\mathbb{R}^3$. On note aussi les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (0, 1, 1),\ v_3 = (0, 1, -1).$$

(1) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
(2) Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(3) Montrer que $v_1, v_2, v_3 \notin P$.
(4) Donner une base de P et en déduire $\dim P$.
(5) Donner un supplémentaire de P dans $\mathbb{R}^3$.