Université Orsay-Paris-Saclay **Examen Juin 2023 MEU152**

Les exercices sont indépendants. Rédigez soigneusement et écrivez lisiblement. La calculatrice, le téléphone portable et les notes de cours sont interdits.

Exercice 1 (4 points) Les ensembles suivants sont-il des espaces vectoriels (on justifiera la réponse) :

1. $\mathrm{Im}(f)$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$.
2. $\mathrm{Im}(f)$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$.
3. $E := D_1 \cup D_1$ où D_1 et D_2 sont deux droites passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$.
4. $F := P_1 \cap P_2$ où P_1 et P_2 sont deux plans passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (2 point) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Quelles sont les différentes possibilités de dimension pour l'espace $\mathrm{Im}(f)$? Montrer avec des exemples que toutes les possibilités peuvent se produire.

Exercice 3 (4 points) Soit $f : E \to F$ et soit $g : F \to G$ deux applications linéaires entres espaces vectoriels.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Kerf}(g \circ f)$.
2. Montrer sur un exemple avec des fonctions f et g particulières que l'on peut ne pas avoir une égalité dans l'inclustion précédente.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Kerf}(g \circ f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

Exercice 4 (6 points) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter dans la base canonique, les vecteurs $f(1, 0)$, $f(0, 1)$, $f(2, 5)$ et $f(1, 3)$.
2. On pose $v_1 = (2, 5)$ et $v_2(1, 3)$. Montrer que $\mathcal{B}' := (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Quelle est la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$?
4. Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$? Et celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$?
5. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 5 (2 points) Soit $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -2, 3, -4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Donner une équation et la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u, v)$.

Exercice 6 (6 points) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x - y + z = 0$ et la droite vectorielle D engendrée par $u = (1, 3, 1)$.

1. Montrer que P et D sont des espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, u)$ avec $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, -1)$. Justifier rapidement que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. On note p la projection sur P parallèlement à D. Calculer la matrice de P dans la base $\mathcal{B}'$
4. Si (x, y, z) est un vecteur écrit dans la base canonique, en déduire une expression de $p(x, y, z)$.
5. On note s la symétrie par rapport à P parallèlement à D. Calculer de même $s(x, y, z)$.