École universitaire Paris-Saclay — Année 2022-2023
Licence de mathématiques 1ère année — Semestre 2

MEU152 – examen partiel du Lundi 14 mars 2023

Durée : 2h00.

La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Merci de bien vouloir $\boxed{\textit{encadrer}}$ *les résultats obtenus, et de* ***ne pas écrire au crayon à papier****. L'utilisation de la calculatrice et des notes de cours n'est pas autorisée.*

Exercice 1 (questions de cours)**.** *Les trois questions sont indépendantes les unes des autres. Pour les deux premières, on demande* ***une démonstration*** *(pas simplement de citer le cours), et on demande de justifier la troisième question.*

(1) Soit E un espace vectoriel, et $v_1, \dots, v_n \in E$. Démontrer que si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille génératrice de E, alors toute famille de E contenant $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice.

(2) Démontrer que si E est un espace vectoriel, et si $F, G \subset E$ sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(3) Montrer que l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -2, -1)$ et $u_3 = (1, 1, -1)$. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}$ et $F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$.

(1) Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une base de E. Que vaut $\dim E$?

(3) La famille (u_1, u_2, u_3) est elle libre ? Est-ce que u_3 est dans F ?

(4) Est-ce que u_3 est dans E ?

(5) Donner une base de $E \cap F$.

(6) Donner un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soit E le sev de $\mathbb{R}^4$ donné par $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \; | x_1 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_4 = 0\}$. Soit $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $u_3 = (1, 0, 1, 0)$. Soit $F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

(1) Donner une base de E et sa dimension.

(2) Donner une base de F et sa dimension.

(3) Donner un système d'équations cartésiennes de F.

(4) Donner une famille génératrice de $E + F$.

(5) Montrer que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

Exercice 4. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus 2.

(1) Justifier rapidement pourquoi $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel, et donner sa base canonique et sa dimension.

(2) Montrer que les polynômes $P_1 := 1$, $P_2 := X - 1$, $P_3 := (X - 1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(3) Déterminer les coordonnées du polynôme $P := 2X^2 - 5X + 6$ dans cette base.

(4) *Bonus :* Montrer que les polynômes $\frac{1}{24}(X - 1)(X - 3)$, $\frac{-1}{8}(X - 1)(X - 7)$ et $\frac{1}{12}(X - 3)(X - 7)$ forment aussi une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(5) *Bonus :* Donner un polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = 48, P(3) = -2\pi, P(7) = 4$. (*Indication : on pourra utiliser la base de la question précédente*).