École universitaire Paris-Saclay Année 2021-2022
Licence de mathématiques 1ère année Semestre 2

MEU152 – examen final du Lundi 16 mai 2022

Durée : 2h00.

La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Merci de bien vouloir $\boxed{\text{encadrer}}$ *les résultats obtenus, et de* ***ne pas écrire au crayon à papier****. L'utilisation de la calculatrice et des notes de cours n'est pas autorisée.*

Exercice 1 (questions de cours)**.** *Les trois questions sont indépendantes les unes des autres. Pour les deux premières, on demande* ***une démonstration****, et pas simplement de citer le cours, et on demande répondre en justifiant aussi la troisième question.*

(1) Soit E, F, G trois espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F), g \in \mathcal{L}(F,G)$ deux applications linéaires. Montrer que $g \circ f$ est linéaire.

(2) Soit E un espace vectoriel. Si $B = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E, alors pour tout $v \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

(3) L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-il une projection ?

Solution 1. (1) On a bien que $g \circ f$ est une fonction de E dans G. Montrons qu'elle est linéaire. Soit $u, v \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$g \circ f(\lambda u + \mu v) = g(f(\lambda u + \mu v)) \underbrace{=}_{f \text{ linéaire}} g(\lambda f(u) + \mu g(v)) = \underbrace{=}_{g \text{ linéaire}} \lambda g \circ f(u) + \mu g \circ f(v).$$

Donc $g \circ f$ linéaire i.e. $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

(2) Soit $v \in E$. Si B est une base de E, alors en particulier elle est génératrice, donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Montrons que le n-uplet est unique. Soit $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ d'autres scalaires tels que

$$v = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n.$$

On a alors $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n$, donc en soustrayant,

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n - (\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n) = (\lambda_1 - \mu_1) u_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) u_n = 0_E.$$

Donc par liberté de B, on a $\lambda_i - \mu_i = 0$ pour tout i, donc $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $1 \le i \le n$. Autrement dit, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ est unique.

(3) L'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ associé à N est donné par $g(x, y) = (y, 0)$. On a donc $g \circ g(x, y) = g(y, 0) = 0$. Or $g \neq 0$ donc $g \circ g \neq g$. Donc g n'est pas une projection. On aurait aussi pu calculer sur les matrices : $N^2 = 0_2 \neq N$ donc g n'est pas une projection.

Exercice 2. On se propose d'étudier l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7x + 3y - 4z - 2t \\ 5x + 5y - 4z - 2t \\ -x + 9y + 4z - 8t \\ 5x + 9y - 4z - 6t \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) Montrer que f est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ où $u_1 = (1, 1, 0, 1), u_2 = (1, 1, 1, 1), u_3 = (1, 1, 2, 3), u_4 = (1, -1, 1, -1)$.

(2) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(3) Donner la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(4) Déterminer le noyau de f. L'application f est-elle injective ? Donner le rang de f.

(5) Calculer M^5. Que faut-il calculer pour écrire l'expression de $f^5 := \underbrace{f \circ f \circ f \circ f \circ f}_{5 \text{ fois}}$ sous la forme "$f^5(x, y, z, t) = ...$" ? *On ne demande pas de faire le calcul dans cette question.*

(6) Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, ainsi que $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

(7) (Bonus) Calculer l'expression de f^5 sous la forme $f^5(x, y, z, t) = ...$

Solution 2. (1) Soit $u = (x, y, z, t), v = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On calcule

$$f(\lambda u + \mu v) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7(\lambda x + \mu x') + 3(\lambda y + \mu y') - 4(\lambda z + \mu z') - 2(\lambda t + \mu t') \\ 5(\lambda x + \mu x') + 5(\lambda y + \mu y') - 4(\lambda z + \mu z') - 2(\lambda t + \mu t') \\ -(\lambda x + \mu x') + 9(\lambda y + \mu y') + 4(\lambda z + \mu z') - 8(\lambda t + \mu t') \\ 5(\lambda x + \mu x') + 9(\lambda y + \mu y') - 4(\lambda z + \mu z') - 6(\lambda t + \mu t') \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7\lambda x + 3\lambda y - 4\lambda z - 2\lambda t + 7\mu x' + 3\mu y' - 4\mu z' - 2\mu t' \\ 5\lambda x + 5\lambda y - 4\lambda z - 2\lambda t + 5\mu x' + 5\mu y' - 4\mu z' - 2\mu t' \\ -\lambda x + 9\lambda y + 4\lambda z - 8\lambda t - \mu x' + 9\mu y' + 4\mu z' - 8\mu t' \\ 5\lambda x + 9\lambda y - 4\lambda z - 6\lambda t + 5\mu x' + 9\mu y' - 4\mu z' - 6\mu t' \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\lambda \begin{pmatrix} 7x + 3y - 4z \\ 5x + 5y - 4z \\ -x + 9y + 4z \\ 5x + 9y - 4z \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\mu \begin{pmatrix} 7x + 3y - 4z \\ 5x + 5y - 4z \\ -x + 9y + 4z \\ 5x + 9y - 4z \end{pmatrix}$$
$$= \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Donc f est linéaire. Sa matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 & -2 \\ 5 & 5 & -4 & -2 \\ -1 & 9 & 4 & -8 \\ 5 & 9 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

(2) Il suffit d'échelonner le système correspondant à $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$. On le fait directmeent sur la matrice dont les colonnes sont donnée par les vecteurs de $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow L2 - L1 \\ L4 \leftarrow L4 - L1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{L2 \leftrightarrow L3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{L3 \leftrightarrow L4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a donc 4 pivots, donc la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre. De plus elle possède $4 = \dim \mathbb{R}^4$ vecteurs, elle est donc aussi génératrice et c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

(3) On calcule directement. On a alors

$$f(u_1) = f(1, 1, 0, 1) = \frac{1}{4}(8, 8, 0, 8) = 2u_1 = 2u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4,$$
$$f(u_2) = f(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{4}(4, 4, 4, 4) = u_2 = 0u_1 + 1u_2 + 0u_3 + 0u_4,$$
$$f(u_3) = f(1, 1, 2, 3) = \frac{1}{4}(-4, -4, -8, -6) = -u3 = 0u_1 + 0u_2 - u_3 + 0u4,$$
$$f(u_4) = f(1, -1, 1, -1) = \frac{1}{4}(2, -2, 2, -2) = -\frac{1}{2}u_4 = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + \frac{1}{2}u_4.$$

On en déduit que la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(4) On calcule le noyau de f dans n'importe quelle base. Par exemple en coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, si $v = [a, b, c, d]_{\mathcal{B}'}$, on a que les coordonnées de $f(v)$ sont données par

$$M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ b \\ -c \\ \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

donc $f(v) = 0$ ssi $(2a, b, -c, d/2) = 0$ ssi $a = b = c = d = 0$. Donc si et seulement si $v = 0_{\mathbb{R}^4}$. Donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et f est injective. D'après le théorème du rang, on a donc $\operatorname{rang}(f) = 4 - \dim \operatorname{Ker} f = 4$ (et donc f est surjective).

(5) La matrice M étant diagonale, un calcul direct donne

$$M^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer l'expression de f^5, il suffit de connaitre la matrice de f^5 dans la base canonique, c'est à dire A^5. On peut soit faire un calcul direct, soit (mieux) utiliser la formule de changement de base :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f^5) = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^5) P_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}},$$

C'est à dire, si $P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a

$$A^5 = P * (M^5) * P^{-1}.$$

(6) Comme $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ avec $\mathcal{B}$ la base canonique, on a directement,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule son inverse par la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(7) On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^5) = A^5 = P \times (M^5) \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 32 & 1 & -1 & \frac{1}{32} \\ 32 & 1 & -1 & -\frac{1}{32} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{32} \\ 32 & 1 & -3 & -\frac{1}{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2017}{64} & -\frac{897}{64} & -31 & \frac{29}{2} \\ \frac{2015}{64} & -\frac{895}{64} & -31 & \frac{29}{2} \\ -\frac{31}{64} & \frac{159}{64} & 1 & -2 \\ \frac{2015}{64} & -\frac{831}{64} & -31 & \frac{27}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 3. On note $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0\}$.

(1) Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner une base de P, ainsi que sa dimension.

On note $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$ et $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3y - 2z = 0\}$; ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (on ne demande pas de le démontrer) et on note $L = Q \cap R$.

(3) Donner une base de L.

(4) Montrer que L et P sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

On note $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la projection sur P parallèlement à L.

(5) Quel est le rang de p ?

Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (2, -1, 0), u_3 = (1, 2, 3)$.

(6) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base.

(7) Donner la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$.

(8) Donner la matrice A de p dans la base canonique.

Solution 3. (1) Par définition, $P \subset \mathbb{R}^3$. De plus $0 + 2 \times 0 - 0 = 0$ donc $(0, 0, 0) \in P$. Soit $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in P$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z'),$$

et $\lambda x + \mu x' + 2(\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(x + 2y - z) + \mu(x' + 2y' - z') = 0$, car $u, v \in P$. Donc $\lambda u + \mu v \in P$ donc P est un SEV de $\mathbb{R}^3$. Alternativement on aurait pu considerer

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x + 2y - z \end{array}$$

on voit que ϕ est linéaire (vérifiez le !), et $P = \mathrm{Ker}\,\phi$, c'est donc un SEV de $\mathbb{R}^3$.

(2) On écrit, $v = (x, y, z) \in P$ ssi $x + 2y - z = 0$ ssi $x = z - 2y$ ssi $v = (z - 2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(1, 0, 1)$. Donc une famille génératrice de P est $(-2, 1, 0), (1, 0, 1)$, or elle est clairement libre. C'est donc une base de P et $\dim P = 2$.

(3) $(x, y, z) \in L$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + y - z & = 0 \\ 3y - 2z & = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} x & = 1/3z \\ y & = 2/3z \end{array} \right.$$

ssi $v = z(1/3, 2/3, 1) = 3z(1, 2, 3)$. Donc $(1, 2, 3)$ est une base de L et $\dim L = 1$.

(4) Soit $v \in L \cap P$. Alors $v = t(1,2,3)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $t + 4t - 3t = 0$ car $v \in P$, donc $2t = 0$ donc $t = 0$ et donc $v = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a donc $L \cap P = \{0\}$. De plus

$$\dim(L+P) = \dim L + \dim P - \dim(L \cap P) = \dim L + \dim P = 3.$$

Comme $L + P \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim R^3 = 3 = \dim L + P$, on a donc $L + P = \mathbb{R}^3$. Donc $L \oplus P = \mathbb{R}^3$ i.e. L et P sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(5) $\operatorname{Im} p = P$ par définition de p, donc $\dim \operatorname{Im} p =: \operatorname{rang}(p) = 2$.

(6) On échelonne la matrice correspondant au systeme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ (i.e. dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$), on a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a donc 3 pivots, donc la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est libre, or elle possède $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs elle est donc génératrice : c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(7) On voit que $u_1, u_2 \in P$ puisqu'ils vérifient son équation (c'est en fait une base de P, mais différente de celle que l'on a donné à la question 2). De plus $u_3 \in L$. On a donc que $p(u_1) = u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3, p(u_2) = 0u_1 + 1u_2 + 0u_3$ et $p(u_3) = 0$. La matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de p est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(8) Pour trouver la matrice A de p dans la base canonique $\mathcal{B}$, on écrit

$$A = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

On a

$$P := P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P^{-1}$, et donc en calculant,

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

On utilise donc la formule, et on trouve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/2 & -3 & -5/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$