École universitaire Paris-Saclay
Licence de mathématiques 1ère année

Année 2022-2023
Semestre 2

MEU152 – Examen final du Mercredi 17 Mai 2023

Durée : 2h00.

*La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Merci de bien vouloir $\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats obtenus, et de **ne pas écrire au crayon à papier**. L'utilisation de la calculatrice et des notes de cours n'est pas autorisée.*

Exercice 1 (questions de cours)**.** *Pour la première question, on demande **une démonstration** (pas simplement de citer le cours), et on demande de justifier la deuxième et troisième question.*

(1) Soit E un espace vectoriel. Montrer que si $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection, alors $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E.

(2) Existe-t-il une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont l'image est le disque unité $D = \{(x,y) |\ x^2+y^2 \leq 1\}$?

(3) Existe-t-il une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ qui soit surjective ?

Exercice 2. On note

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 2P' - P'' \end{array}$$

(1) Rappeler quelle est la base canonique B de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner $\dim \mathbb{R}_3[X]$.

(2) Donner la matrice A de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}_3[X]$.

(3) On admet que $B' = (X^3, 6X^2 - 6X, 24X - 24, 48)$ est libre. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(4) Montrer que la matrice de passage $P_{B,B'}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -24 & 48 \\ 0 & -6 & 24 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) Que vaut $P_{B',B}$?

(6) Donner la matrice M de f dans la base B'.

(7) Que vaut A^4 ? (*On pourra éventuellement calculer M^4*)

Exercice 3. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On s'intéresse à l'application linéaire

$$s_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{10}(x+9y+6z, 9x+y-6z, 3x-3y+8z) \end{array}$$

(1) Donner la matrice A_1 de s_1 dans la base canonique B.

(2) Calculer A_1^2.

(3) En déduire que s_1 est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ et donner son inverse.

On note $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y + z = 0\}$ et $D = \operatorname{Vect}(2,-2,1)$.

(4) Montrer que Q et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Soit s_2 la symétrie par rapport à Q parallèlement à D. On note

$$e_1 = (1,-1,0), e_2 = (0,0,1), e_3 = (1,1,0).$$

(5) Montrer que $B' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(6) (a) Montrer que $s_1(e_1) = -\frac{4}{5}e_1 + \frac{3}{5}e_2$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P

(b) Exprimer de même $s_1(e_2)$ et $s_1(e_3)$ en fonction de e_1, e_2, e_3. En déduire que la matrice M_1 de s_1 dans la base B' est

$$M_1 = \mathrm{Mat}_{B'}(s_1) = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(7) (a) Si $v \in \mathbb{R}^3$ se décompose sous la forme

$$v = (x, y, z) + t(2, -2, 1), \qquad \text{avec } x - y + z = 0,$$

que vaut $s_2(v)$?

(b) En utilisant la question précédente, exprimer $s_2(e_1), s_2(e_2)$ et $s_2(e_3)$ dans la base canonique et dans la base B'.

(c) En déduire que la matrice M_2 de s_2 dans la base B' est

$$M_2 = \mathrm{Mat}_{B'}(s_2) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(8) On note $r = s_2 \circ s_1$. Donner la matrice R de r dans la base B'.

(9) Donner la matrice de r^7 dans la base B'.

(10) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner une expression de $r^7(x, y, z)$ en fonction de x, y, z.