Université Orsay-Paris-Saclay **Examen Juin 2022 MEU152**

Les exercices sont indépendants. Rédigez soigneusement et écrivez lisiblement. La calculatrice, le téléphone portable et les notes de cours sont interdits.

Exercice 1 (Questions de cours) 1. Soit $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Peut elle être injective (justifier votre réponse) ?

2. Démontrer que si $f : E \to F$ est une application linéaire entre espaces vectoriels, alors elle est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.

Exercice 2 (Exemples de cours) 1. Les ensembles suivants sont-il des espaces vectoriels (on justifiera la réponse) :

(a) $B_R := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq R\}$ pour $R \in [0, +\infty[$ (discuter selon la valeur de R).

(b) $E := D_1 \cup D_1$ où $D_1 = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 | \ x \in \mathbb{R}\}$ et $D_2 = \{(y, 2y, -y) \in \mathbb{R}^3 | \ y \in \mathbb{R}\}$ sont deux droites dans $\mathbb{R}^3$.

(c) $F := P_1 \cap P_2$ où P_1 et P_2 sont deux plans passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que la famille de fonctions $(\cos, \sin)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ forme une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ avec

$$v_1 = (1, -1, 0, 2), \quad v_2 = (2, 1, 3, 1), \quad w_1 = (1, 1, 1, 1), \quad w_2 = (3, -4, 4, 2).$$

Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$.

Exercice 4 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donné dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ par la matrice

$$M = Mat_{\mathcal{B}_0}(f) := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathcal{B}' := (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = (1, 0, -1)$, $e'_2 = (0, 1, 1)$, et $e'_3 = (1, 0, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Quel est le rang de f ?

TOURNEZ LA PAGE S.V.P

Exercice 5 Soit $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$. Posons $u_1 = (1, 4)$ et $u_2 = (1, 3)$. On admet que $\mathcal{B}' := (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit f l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_0$ est

$$A = Mat_{\mathcal{B}_0}(f) := \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$
3. Prouver que $\mathrm{Vect}(u_1)$ et $\mathrm{Vect}(u_2)$ sont supplémentaires.
4. Montrer que f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u_2)$
5. Quelle est la matrice de la projection par rapport à $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u_2)$ dans la base $\mathcal{B}'$?
6. Quelle est la matrice de la projection par rapport à $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u_2)$ dans la base $\mathcal{B}_0$?

Exercice 6 Soit $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ donné par $P \mapsto (P(0), P(1), P(2))$. Prouver que ϕ est linéaire et bijective (on rappelle qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 a au plus deux racines dans $\mathbb{R}$).