MEU152 – examen partiel du Lundi 21 mars 2022

Durée : 2h00.

La précision des arguments utilisés et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Merci de bien vouloir $\boxed{\textit{encadrer}}$ *les résultats obtenus, et de* ***ne pas écrire au crayon à papier****. L'utilisation de la calculatrice et des notes de cours n'est pas autorisée.*

Exercice 1 (questions de cours)**.** *Les trois questions sont indépendantes les unes des autres. Pour les deux premières, on demande* ***une démonstration****, et pas simplement de citer le cours, et on demande de justifier aussi la troisième question.*

(1) Soit E un espace vectoriel et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que toute sous-famille de $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.

(2) Soit E un espace vectoriel et $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(3) Montrer que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Solution 1. (1) Soit $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ une sous famille de $(v_1, \dots, v_n)$. Supposons que $\sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} v_{i_k} = 0$ avec $\lambda_{i_k} \in \mathbb{R}$. Posons $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$. Alors

$$0 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} v_{i_k} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} v_{i_k} + \underbrace{\sum_{i \notin \{i_1, \dots, i_r\}} \lambda_i v_i}_{=0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Mais comme $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, on a $\lambda_i = 0$ pour tout i, en particulier $\lambda_{i_k} = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, donc $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ est libre.

(2) Comme $0_E \in F$ et $0_E \in G$ puisque F, G sont des SEV de E, on a $0_E \in F \cap G$. Soit $v, w \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors comme F est un SEV, et $v, w \in F$, on a $\lambda v + \mu w \in F$. De même, comme $v, w \in G$, et G SEV, on a $\lambda v + \mu w \in G$. Donc $\lambda v + \mu w \in F \cap G$, donc $F \cap G$ est un SEV de E.

(3) Clairement, $0_{\mathbb{R}^2} =: 0 = (0, 0) \notin S$ car $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$, donc S n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, où on a posé

$$v_1 = (1, -1, 0, 2),\ v_2 = (2, 1, 3, 1),\ w_1 = (1, 1, 1, 1),\ w_2 = (3, -4, 4, 2),\ w_3 = (3, -11, 5, 1).$$

(1) Donner une base de F. Quelle est sa dimension ?

(2) Donner une base de G. Quelle est sa dimension ?

(3) Donner une famille génératrice de $F + G$.

(4) Extraire une base de la famille précédente et en déduire la dimension de $F + G$.

(5) Donner une (ou des) équation(s) cartésienne(s) de $F + G$.

(6) Calculer $\dim F \cap G$.

Solution 2. (1) Montrons que la famille (v_1, v_2), qui est génératrice de F par définition de F, est aussi libre ; ce sera donc une base de F. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$. On en déduit le système suivant

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu &= 0 \\ -\lambda + \mu &= 0 \\ 3\mu &= 0 \\ 2\lambda + \mu &= 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $\mu = 0$ (troisieme équation) et $\lambda = 0$ (première équation). La famille (v_1, v_2) est donc libre, est donc une base de F et $\dim F = 2$.

(2) La famille (w_1, w_2, w_3) est génératrice de G par définition. Cherchons si elle est libre, et sinon à en extraire une base. On regarde donc le système associé à $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$, c'est à dire

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 - 11\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ -7\lambda_2 - 14\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{7} L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce systeme a une infinité de solutions, la famille n'est donc pas libre. De plus il a comme pivots λ_1, λ_2 donc (w_1, w_2) est une base de G. Donc $\dim G = 2$.

(3) D'après le cours, (v_1, v_2, w_1, w_2) est une famille génératrice de $F + G$ puisque (v_1, v_2) engendre F et (w_1, w_2) engendre G.

(4) On applique la méthode précédente pour extraire une base d'une famille génératrice i.e. on résoud $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w_1 + \lambda_4 w_2 = 0$, on a alors le systeme suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 4\lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 & = & 0 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 - 4\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_3 + 5\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_3 - 5\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_3 + 5\lambda_4 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Il y a 3 pivots, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, donc v_1, v_2, w_1 est une base de $F + G$. On a donc $\dim F + G = 3$.

(5) Il faut donc trouver des équations cartésiennes pour $F + G = \operatorname{Vect}(v_1, v_2, w_1)$. On écrit $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ est dans $F + G$ si et seulement si il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w_1$, i.e. si et seulement si le système suivant à une solution :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & x \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & y \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 & = & z \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & t \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & x \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & y + x \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 & = & z \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 & = & t - 2x \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & x \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & x + y \\ -\lambda_2 & = & z - x - y \\ \lambda_3 & = & t + y - x \end{array}\right. \underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & x \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & x + y \\ -\lambda_3 & = & t + y - x \\ 0 & = & -2x + z + t \end{array}\right.$$

Ce système a une solution si et seulement si $-2x + z + t = 0$, c'est donc l'équation cartésienne de $F + G$ dans $\mathbb{R}^4$ (et on voit donc qu'il n'y en a besoin que d'une seule).

(6) Par la formule de la dimension

$$\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Exercice 3. On dit qu'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ est *symétrique* si $A^t = A$ (i.e. si elle est égale à sa transposé). On note $S_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) |\ A = A^t\}$ l'ensemble des matrices symétriques. On rappelle que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ on note $A^t := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que $S_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que $S_2(\mathbb{R})$ est de dimension 3 dont une base est

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

forment une base de $S_2(\mathbb{R})$.

(4) Si a, b, c sont quelconques dans $\mathbb{R}$, décomposer dans la base (A, B, C) la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Solution 3. (1) L'élément neutre de $M_2(\mathbb{R})$ est $0_2 := 0_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$[1]. On a clairement $0_2^t = 0_2$ donc $0_2 \in S_2(\mathbb{R})$. Soit $A, B \in S_2(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Notons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Alors comme $A, B \in S_2(\mathbb{R})$ on a $b = c$ et $y = z$, i.e.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & t \end{pmatrix}.$$

On veut montrer que $M := \lambda A + \mu B \in S_2(R)$. Mais

$$M = \lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu x & \lambda b + \mu y \\ \lambda b + \mu y & \lambda d + \mu t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^t = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu x & \lambda b + \mu y \\ \lambda b + \mu y & \lambda d + \mu t \end{pmatrix} = M.$$

Donc $M = \lambda A + \ \mu B \in S_2(\mathbb{R})$ et $S_2(\mathbb{R})$ est un SEV de $M_2(\mathbb{R})$.

(2) On va montrer que (E_1, E_2, E_3) est une base de $S_2(\mathbb{R})$. Montrons qu'elle est libre. Si $aE_1 + bE_2 + cE_3 = 0_2$, on a

$$aE_1 + bE_2 + cE_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc, en regardant les entrées de la matrice, $a = b = c = 0$: la famille (E_1, E_2, E_3) est donc libre. Montrons qu'elle est génératrice : soit $M \in S_2(\mathbb{R})$. On écrit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Or $M \in S_2(\mathbb{R})$ donc

$$M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donc $b = c$. On a donc

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + dE_3.$$

On a donc que (E_1, E_2, E_3) est génératrice, donc c'est une base de $S_2(\mathbb{R})$ et $\dim S_2(\mathbb{R}) = 3$.

(3) Les matrices A, B, C sont clairement symétriques (donc dans $S_2(\mathbb{R})$), et la famille (A, B, C) possède $3 = \dim S_2(\mathbb{R})$ vecteurs, et, il suffit donc de montrer que (A, B, C) est libre, elle sera alors automatiquement génératrice. Supposons donc que $aA + bB + cC = 0_2$, on a alors

$$aA + bB + cC = \begin{pmatrix} a + b - c & -2a + 3b + c \\ -2a + 3b + c & a + 6b - 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc en comparant les coordonnées on obtient le système

$$\begin{cases} a + b - c &= 0 \\ -2a + 3b + c &= 0 \\ a + 6b - 3c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c &= 0 \\ 5b - c &= 0 \\ 5b - 2c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c &= 0 \\ 5b - c &= 0 \\ -c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{cases}$$

Donc la famille (A, B, C) de $S_2(\mathbb{R})$ est libre, comme elle contient $3 = \ \dim S_2(\mathbb{R})$ vecteurs c'est une base de $S_2(\mathbb{R})$.

1. On note 0_2 pour indiquer la taille de la matrice, et ne pas confondre avec le réel 0

(4) On cherche les coordonnées de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dans la base (A, B, C), i.e. on cherche $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $M = xA + yB + zC = \begin{pmatrix} x+y-z & -2x+3y+z \\ -2x+3y+z & x+6y-3z \end{pmatrix}$, donc en comparant les entrées des matrices, on veut résoudre le système d'inconnues x, y, z :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & a \\ -2x+3y+z & = & b \\ x+6y-3z & = & c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & a \\ 5y-z & = & b+2a \\ 5y-2z & = & c-a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & a \\ 5y-z & = & b+2a \\ -z & = & c-3a-b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3a+\frac{3b-4c}{5} \\ y & = & a+\frac{2b-c}{5} \\ z & = & 3a+b-c \end{array} \right.$$

On en déduit donc que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = (3a + \frac{3b-4c}{5})A + (a + \frac{2b-c}{5})B + (3a+b-c)C.$$

Exercice 4. On note l'ensemble $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x+3y-z = 0\}$, inclus dans $\mathbb{R}^3$. On note aussi les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 1, 1), \; v_2 = (0, 1, 1), \; v_3 = (0, 1, -1).$$

(1) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(3) Montrer que $v_1, v_2, v_3 \notin P$.

(4) Donner une base de P et en déduire $\dim P$.

(5) Donner un supplémentaire de P dans $\mathbb{R}^3$.

Solution 4. (1) On sait que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et (v_1, v_2, v_3) contient 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. On résoud $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2-\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right).$$

La famille est donc libre, comme elle possède $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs (de $\mathbb{R}^3$) elle est automatiquement une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit $0 = (0, 0, 0)$. Alors $0 \in P$ puisque $0 + 3 \cdot 0 - 0 = 0$. Soit $v, w \in P$, $v = (x, y, z)$ et $w = (x', y', z')$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda v + \mu w = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$. On calcule :

$$\lambda x + \mu x' + 3(\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(\underbrace{x+3y-z}_{=0 \text{ car } v\in P}) + \mu(\underbrace{x'+3y'-z'}_{=0 \text{ car } w\in P}) = 0.$$

Donc $\lambda v + \mu w \in P$ et donc P est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

(3) Il suffit de calculer successivement pour v_1, v_2, v_3 :

$$1+3-1 = 1 \neq 0, \quad \text{donc } v_1 \notin P,$$
$$0+3-1 = 2 \neq 0 \quad \text{donc } v_2 \notin P,$$
$$0+3+1 = 4 \neq 0 \quad \text{donc } v_3 \notin P.$$

(4) Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $v \in P$ ssi $x + 3y - z = 0$ ssi $x = -3y + z$, i.e. ssi

$$v = (-3y + z, y, z) = y(-3, 1, 0) + z(1, 0, 1).$$

La famille $(u, v) := ((-3, 1, 0), (1, 0, 1))$ est donc génératrice de P, or comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, elle est aussi libre, c'est donc une base de P. On a donc $\dim P = 2$.

(5) Pour donner un supplémentaire, il faut compléter la base précédente (u, v) de P en une base de $\mathbb{R}^3$. Or $v_1 \notin P = \text{Vect}(u, v)$ d'après la question 3, donc d'après le cours, la famille (u, v, v_1) est libre. Comme elle a $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est automatiquement une base de $\mathbb{R}^3$. On a donc d'après le cours que $Q = \text{Vect}(v_1)$ est un supplémentaire de P dans $\mathbb{R}^3$.